Chapitre I - Systèmes d'équations linéaires

Introduction

Dans ce chapitre, on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Motivation : En mathématiques, le but du jeu est souvent de résoudre une équation, ou plusieurs (on parle alors de *système* d'équations). Et généralement, cela n'a rien d'évident :

Quelles sont les solutions de

$$\begin{cases} \sin(x)e^y - 3x\cos(xy) = 2 \\ 4x^y + \pi y^x = 56 \end{cases}$$

...Moi non plus.

Les systèmes d'équations *linéaires* sont un cas plus agréable :

- Ils ont des applications dans de nombreux domaines scientifiques
- Ils sont à la base des calculs en *algèbre linéaire*.
- On sait les résoudre !

Dans ce chapitre, on va donc apprendre le vocabulaire et la méthode de résolution de ces systèmes.

Systèmes à 2 équations, 2 inconnues

Définition 1

Un système linéaire *à deux équations et deux inconnues x et y est un système de la forme*

$$(S)\begin{cases} ax & + & by & = & m \\ cx & + & dy & = & p \end{cases}$$

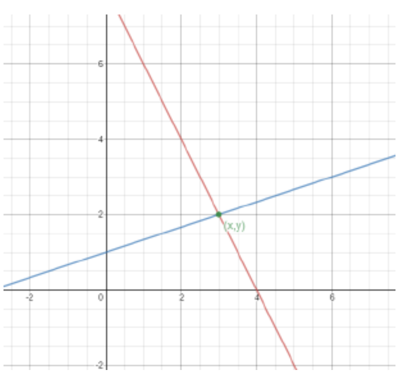
Résoudre le système revient à trouver tous les couples de réels (x, y) qui vérifient simultanément les deux équations de (S). Voyons comment interpréter cette situation.

Première approche : Ligne par ligne

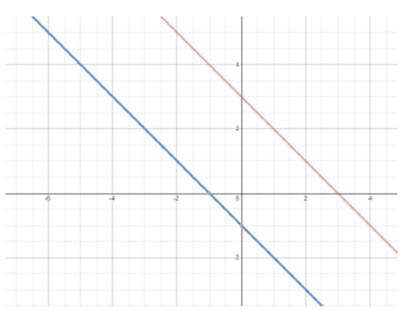
Les lignes de (S) sont les équations des droites :

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, ax + by = m\}, \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, cx + dy = p\}.$$

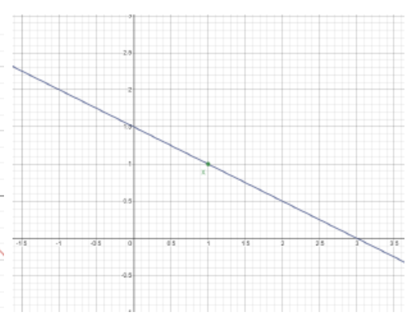
$\rightsquigarrow$ Une solution de (S) est donc un point d'intersection de D_1 et D_2. Trois cas se présentent donc :



D_1 et D_2 sécantes :
$\rightsquigarrow$ unique solution



D_1 et D_2 parallèles :
$\rightsquigarrow$ pas de solution



D_1 et D_2 confondues :
$\rightsquigarrow$ infinité de solutions

Deuxième approche : Colonne par colonne

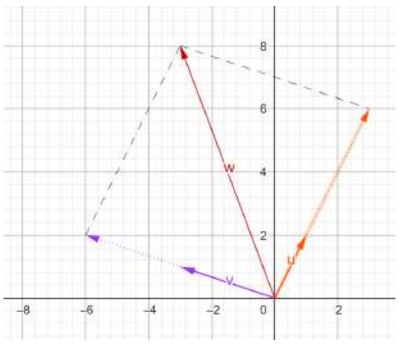
D'un autre côté, considérons les coefficients du système en colonne :

$$(S)\begin{cases} ax & + & by & = & m \\ cx & + & dy & = & p \end{cases}$$

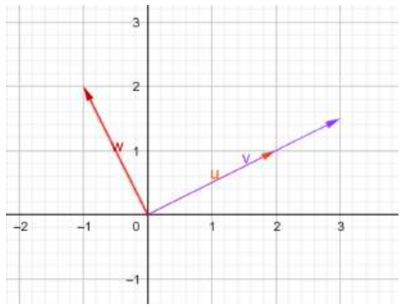
On note $\vec{u} = (a, c)$, $\vec{v} = (b, d)$ et $\vec{w} = (m, p)$. Alors (S) équivaut à

$$x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{w}.$$

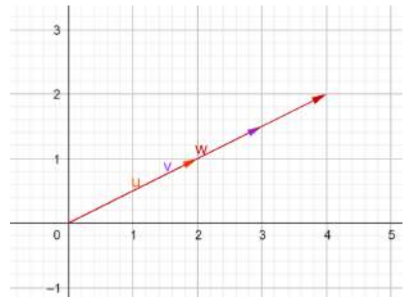
A nouveau, trois cas se présentent :



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment un repère :
$\rightsquigarrow$ unique solution



$\vec{u}$, $\vec{v}$ colinéaires mais pas $\vec{w}$:
$\rightsquigarrow$ pas de solution



$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont colinéaires :
$\rightsquigarrow$ infinité de solution

Troisième approche : Par le calcul

Enfin, on peut résoudre le système par le calcul. On peut supposer que $a \neq 0$, et alors

$$\begin{cases} ax + by & = m \\ a(cx + dy) & = ap \end{cases} \quad L_2 \leftarrow aL_2$$

On peut alors utiliser la première ligne pour "se débarrasser de x" dans la deuxième :

$$\begin{cases} ax + by & = m \\ a(cx + dy) - c(ax + by) & = ap - cm \end{cases}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - cL_1$$

$$\begin{cases} ax + by & = m \\ (ad - bc)y & = ap - cm \end{cases}$$

Tout dépend donc de $ad - bc$:

- Si $ad - bc \neq 0$, il y a une unique solution :

$$y = \frac{ap - cm}{ad - bc}, \quad x = \frac{md - bp}{ad - bc}$$

- Si $ad - bc = 0$, deux cas se présentent :
  - Soit $ap - cm \neq 0$. Auquel cas le système n'a aucune solution.
  - Soit $ap - cm = 0$. Alors le système est équivalent à $ax + by = m$, ou encore $x = \frac{m}{a} - \frac{b}{a}y$. Il y a alors une infinité de solutions : chaque choix de y donne un x tel que (x, y) soit solution de (S) (on dira que y est une inconnue libre).

Le cas général : Systèmes à n équations, p inconnues

Définition 2

- *On appelle* ***équation linéaire*** *d'inconnues* $(x_1, \ldots, x_p)$ *toute équation de la forme*

$$a_1x_1 + a_2x_2 \cdots + a_px_p = b.$$

où $a_1, \ldots, a_p, b \in \mathbb{K}$.

- *Un* ***système de*** n ***équations linéaires à*** p ***inconnues*** *est une liste de* n *équations linéaires :*

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Les $a_{ij} \in \mathbb{K}$ *sont appelés les* ***coefficients*** *de* (S), *les* $b_i \in K$ *forment le* ***second membre***.

Exemple 1 (*Exemples et contre-exemples*)

1. $8x + \sqrt{2}y - 55z = 1$ *: Linéaire ? Vrai* ☐ *Faux* ☐
2. $\sqrt{x} - 3y = 2$ *: Linéaire ? Vrai* ☐ *Faux* ☐
3. $$\begin{cases} 3x & - & 4y & = & \frac{1}{7} \\ \sqrt{5}x & + & e^{13}y & = & \frac{\pi}{6} \\ \sin(1)x & - & 2y & = & 54 \end{cases}$$

   Linéaire ? Vrai ☐ *Faux* ☐
4. $$\begin{cases} xy + 2z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

   Linéaire ? Vrai ☐ *Faux* ☐

Définition 3

- *Une* ***solution*** *de* (S) *est un* p*-uplet* $(s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{K}^p$ *vérifiant simultanément les* n *équations linéaires qui composent* (S). *L'****ensemble des solutions de*** (S) *est, sans grande surprise, l'ensemble de tous ces* p*-uplets.*
- *Résoudre un système linéaire consiste à donner l'ensemble des solutions (sous une forme explicite).*
- *Deux systèmes* (S) *et* (S') *sont* ***équivalents*** *s'ils ont le même ensemble de solutions :*

$$(s_1, \ldots, s_p) \text{ solution de } (S) \iff (s_1, \ldots, s_p) \text{ solution de } (S')$$

Systèmes échelonnés

Avant de s'attaquer à la résolution générale de systèmes linéaires, voyons un cas facile à résoudre :

$$\begin{cases} 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ & & & & x_3 & = & 3 \end{cases}$$

qui nous donne, en remontant, une unique solution : $(1, -3, 3)$.

Par contre, le système suivant n'a aucune solution :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & + & 2x_2 & = & 12 \\ & & 2x_2 & = & 4 \\ & & 0 & = & 25 \end{array}\right.$$

Un chouïa plus dur, mais pas beaucoup plus :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 6 \\ & & & & 3x_3 & + & 6x_4 & = & 3 \end{array}\right.$$

Résolution :

Définition 4

- *Un système linéaire est* ***échelonné*** *si le nombre de coefficients nuls en début d'équation croît strictement à chaque ligne.*
- *Le premier coefficient non nul de chaque ligne est appelé* ***"pivot"***.
- *On appelle* ***rang*** *du système le nombre de pivots.*

Exemple 2

Le système à 4 inconnues et 3 équations suivant est échelonné :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & + & 2x_2 & & & + & 5x_4 & = & 3 \\ & & x_2 & - & 3x_3 & & & = & 0 \\ & & & & 6x_3 & + & x_4 & = & 5 \end{array}\right.$$

$\leadsto$ *Ce système est de rang* $\boxed{}$.

Plus généralement, un système échelonné est de la forme

$$(SE)\left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + \qquad + a_{1p}x_p & = b_1 \\ \qquad a_{2j_2}x_{j_2} + \cdots + \qquad + a_{2p}x_p & = b_2 \\ & \vdots \\ \qquad\qquad a_{rj_r}x_{j_r} + \cdots + a_{rp}x_p & = b_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 & = b_{r+1} \\ & \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 & = b_n \end{array}\right.$$

$\leadsto$ Le rang du système est l'entier r.

Définition 5

On appelle ***inconnues principales*** *les inconnues $x_1, x_{j_2} \dots x_{j_r}$ qui correspondent à un pivot et* ***inconnues libres*** *les autres inconnues.*

On a donc

$$\boxed{r \leq n} \quad \boxed{r \leq p} \quad \boxed{p = r + \text{ nb d'inconnues libres}}$$

Résolution des systèmes échelonnés

L'avantage des systèmes échelonnés, c'est qu'ils sont faciles à résoudre. On distingue différents cas :

- Si l'un des $b_{r+1}, \dots, b_n$ est non nul, **le système n'a pas de solution**. Ce cas ne se produit que si $r < n$.
- Sinon, $b_{r+1} = \dots = b_n = 0$, et, en ôtant les (éventuelles) lignes inutiles $0 = 0$, notre système échelonné est équivalent à

$$(SE') \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + & + a_{1p}x_p & = b_1 \\ \quad a_{2j_2}x_{j_2} + \dots + & + a_{2p}x_p & = b_2 \\ & & \vdots \\ & a_{rj_r}x_{j_r} + \dots + a_{rp}x_p & = b_r \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ Deux cas se présentent alors :

- si $r = p$:

$$(SE') \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + & + a_{1p}x_p & = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + \dots + & + a_{2p}x_p & = b_2 \\ & & \vdots \\ & a_{rr}x_r & = b_r \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ Le système admet une **unique solution**, qu'on obtient “en remontant”.

- si $r < p$, les inconnues $(x_{j_{r+1}}, \dots, x_p)$ sont libres. On les “passe de l'autre côté'

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j_r}x_{j_r} & = b_1 - a_{1j_{r+1}}x_{j_r+1} - \dots - a_{1p}x_p \\ \quad a_{2j_2}x_{j_2} + \dots + a_{2j_r}x_{j_r} & = b_2 - a_{2j_{r+1}}x_{j_r+1} - \dots - a_{2p}x_p \\ & \vdots \\ a_{rj_r}x_{j_r} & = b_r - a_{rj_{r+1}}x_{j_r+1} - \dots - a_{rp}x_p \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ Le système admet **une infinité de solutions**, une pour chaque $(p-r)$-uplet $(x_{j_{r+1}}, \dots, x_p)$ possible.

Exemple 3

Considérons à nouveau le système :

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 3 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \\ 6x_3 + x_4 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 2x_2 + 5x_4 - 3 \\ x_2 = 3x_3 \\ x_3 = \frac{5-x_4}{6} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 2 + 4x_4 \\ x_2 = \frac{5-x_4}{2} \\ x_3 = \frac{5-x_4}{6} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ *Pour chaque $x_4 \in \mathbb{R}$, on obtient donc une solution du système. Il y a donc une infinité de solutions, et l'ensemble des solutions est*

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(2 + 4x_4, \frac{5-x_4}{2}, \frac{5-x_4}{6}, x_4 \right), x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$\rightsquigarrow$ *Par exemple* $\boxed{(\quad , \quad , \quad , \quad)}$ *et* $\boxed{(\quad , \quad , \quad , \quad)}$ *sont des solutions.*

Pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss, qui permet de résoudre *tous* les systèmes linéaires, se base sur les évidences suivantes :

- Quels que soient A, B, A', B',

$$\begin{cases} A = B \\ A' = B' \end{cases} \iff \begin{cases} A' = B' \\ A = B \end{cases}$$

- Si $\alpha \neq 0$, $A = B \iff \alpha A = \alpha B$.
- Pour tout réel λ,

$$\begin{cases} A = B \\ A' = B' \end{cases} \iff \begin{cases} A = B \\ A' + \lambda A = B' + \lambda B \end{cases}$$

On en déduit qu'on peut appliquer les **opérations élémentaires** suivantes au système (S) pour obtenir un système équivalent.

- l'échange de deux lignes : $\boxed{L_i \leftrightarrow L_j}$
- la multiplication d'une ligne par un réel *non nul* α : $\boxed{L_i \leftarrow \alpha L_i}$
- l'ajout à une ligne d'un multiple d'une autre : $\boxed{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$

L'algorithme du **pivot de Gauss** consiste à passer d'un système linéaire (S) à un système échelonné équivalent (S_E) en utilisant intelligemment les 3 opérations élémentaires.

Pour cela, on utilise la première ligne (si $a_{11} \neq 0$, sinon on échange) pour se "débarrasser" des x_1 apparaissant dans les lignes en dessous.

Puis on garde le x_2 a la deuxième ligne et on s'en sert pour éliminer tous les x_2 sur les lignes $3, 4, ..., n$. On élimine ainsi de plus en plus de variables.

Exemple 4 (*Pivot de Gauss : exemple 1*)

On considère le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} & & 3y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 2 \\ 3x & & & + & z & & & = & 4 \\ 2x & - & y & + & z & - & t & = & 3 \end{array}\right.$$

Résolution :

Exemple 5 (***Pivot de Gauss : exemple 2***)

Considérons le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & = & 3 \\ x & - & 4y & + & 3z & = & 2 \end{array}\right.$$

Résolution : [1]

Exemple 6 (***Pivot de Gauss : exemple 3***)

Considérons enfin le système à 4 équations et 5 inconnues

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & & & + & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & - & x_5 & = & 1 \end{array}\right.$$

Résolution : [2]

1. Indication : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$; puis $L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2$.
2. Indication : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1, L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$; puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_2, L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$, puis $L_4 \leftarrow L_4 + L_3$.

Ensemble des solutions d'un système linéaire

Il y a donc trois cas possibles pour l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ d'un système d'équation linéaires (S), qui sont ceux qu'on a obtenu pour les systèmes échelonnés :

1. Soit il n'y a aucune solutions : $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$;
2. Soit il y a une unique solution $\boxed{\mathcal{S} = \{X_0\}}$;
3. Soit il y a une infinité de solutions, dépendant du choix de $p - r$ inconnues libres $x_{i_1}, \dots x_{i_{p-r}}$.
   L'ensemble des solutions est infini, et de la forme

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \left(c_1 + \sum_{j=1}^{p-r} \lambda_{1j} x_{i_j}, \dots, c_p + \sum_{j=1}^{p-r} \lambda_{pj} x_{i_j} \right), x_{i_1}, \dots x_{i_{p-r}} \in \mathbb{R} \right\}}$$

Systèmes homogènes

Dans le cas particulier où le second membre est nul ($b_1 = \cdots = b_n = 0$), on dit que le système est **homogène**. Un système homogène admet toujours au moins la solutions nulle $x_1 = \cdots = x_p = 0$. Il n'y a donc que deux cas possibles :

- soit le rang du système est égal au nombre d'inconnues, et la $(0, \dots, 0)$ est la seule solution ;
- soit le rang est strictement inférieur au nombre d'inconnues, et il y a alors, en plus de $(0, \dots, 0)$, une infinité de solutions non nulles.

En particulier, un système homogène qui a plus d'inconnues que d'équations a toujours une infinité de solutions.