Chapitre II - Matrices

Introduction

Dans ce chapitre, on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et on l'appelle l'ensemble des *scalaires*.

Motivation : Remarquez que, pendant la résolution d'un système linéaire, pour savoir quelle opération faire, on ne s'intéresse pas aux inconnues $(x_1, \dots, x_p)$ mais seulement aux coefficients devant chaque inconnue.

$\rightsquigarrow$ Les matrices vont nous donner une présentation plus efficaces des systèmes, où on ne garde que les coefficients et le second membre.

Des systèmes aux matrices

Définition 1

Etant donné un système linéaire

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

on appelle respectivement ***matrice des coefficients*** *de* (S) *et* ***matrice augmentée*** *les tableaux de nombres*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}, \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{np} & b_n \end{array}\right)$$

On peut alors résoudre le système en appliquant les opérations élémentaires aux lignes de la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 3 \\ x - 4y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y - 2z = 1 \\ -5y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y - 2z = 1 \\ -6z = 6 \end{cases}$$

On peut faire la remontée avec ces mêmes opérations :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{array}\right) \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & y & - & 2z & = & 1 \\ & & & - & 6z & = & 6 \end{array}\right.$$

$$L_3 \leftarrow -\frac{1}{6} L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & y & - & 2z & = & 1 \\ & & & & z & = & -1 \end{array}\right.$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3, L_1 \leftarrow L_1 + L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & & & = & -1 \\ & & & & z & = & -1 \end{array}\right.$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & & & = & 1 \\ & & y & & & = & -1 \\ & & & & z & = & -1 \end{array}\right.$$

Définitions et règles de calcul

Définition 2

*Une **matrice** A de taille $n \times p$ est un tableau de scalaires à n lignes et p colonnes :*

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}}_{p \text{ colonnes}} \; n \text{ lignes} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

i numérote les lignes
j —— colonnes

où $a_{ij} \in \mathbb{K}$ pour tous i, j.

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Si $n = p$ on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Exemple 3

$$A = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

Définition 4

Deux matrices A et B sont égales si elles ont même taille $n \times p$ et mêmes coefficients :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall j \in \{1, \ldots, p\}, a_{ij} = b_{ij}.$$

Opérations de base

Définition 5

- *Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Leur* ***somme*** *$C = A + B$ est la matrice de taille $n \times p$ définie par*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

- *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$. On note λA la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont λa_{ij}, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$.*

Exemple 6

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 4$$

$$A + B = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}, 4A = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}$$

Notation 7

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- *On note $0_{n,p}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls.*
- *On note $-A$ la matrice $(-1) \cdot A$ et on l'appelle l'opposé de A.*
- *On note $A - B = A + (-B)$.*

Proposition 8 (*Propriétés peu surprenantes*)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a :

1. Associativité : $A + (B + C) = (A + B) + C$;
2. Commutativité : $A + B = B + A$;
3. $A + 0_{n,p} = A$, $A + (-A) = 0_{n,p}$;
4. Distributivité : $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$, $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

Produit matriciel

L'opération de produit matriciel est un peu plus complexe : elle ne se borne pas à multiplier les coefficients entre eux.

On verra toutefois que c'est en faisant comme cela qu'on peut appliquer les matrices à un grand nombre de problèmes.

Etape 1 : Produit ligne-colonne

Soit $A = (a_1, \dots, a_p) \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. On définit le produit de A par B par

$$AB = (a_1 b_1 + \dots + a_p b_p) = (\sum_{k=1}^{p} a_k b_k) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}.$$

Exemple 9

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

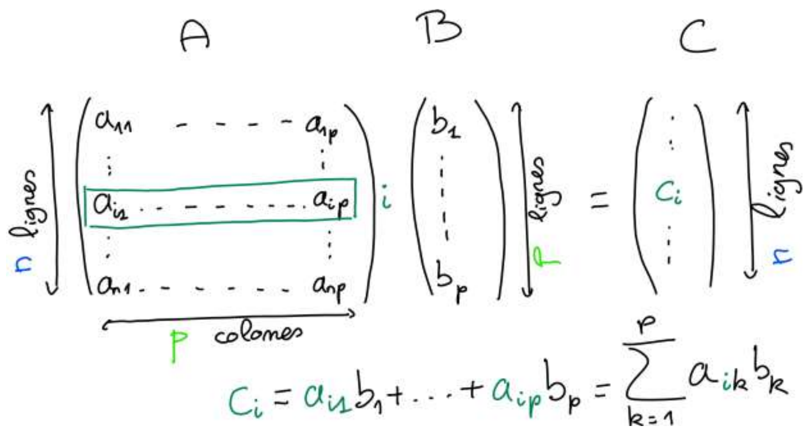
alors $AB = \boxed{\qquad\qquad}$, *mais AC n'est pas défini.*

$\rightsquigarrow$ Une équation linéaire est le produit d'une matrice-ligne de coefficients par une matrice-colonne d'inconnues :

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 \dots + a_p x_p = b \iff \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = b$$

Etape 2 : Produit matrice-colonne

Soient $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Alors le produit AB est la matrice colonne $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dont le coefficient sur la i-ème ligne est le produit de la i-ième ligne de A par B :



Exemple 10

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R}), \ B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

nous donne

$$AB = \begin{pmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}).$$

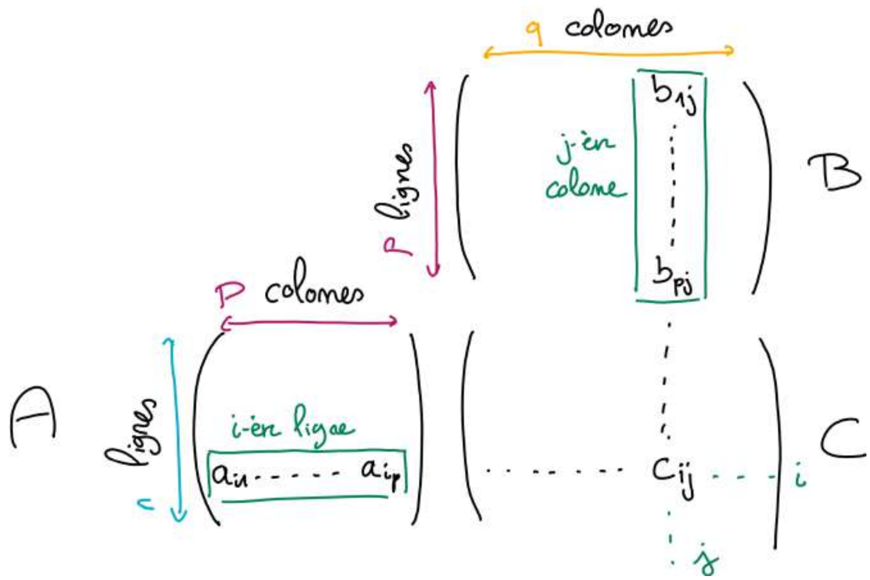
⇝ Un système linéaire est donc représenté par le produit de la matrice des coefficients par la matrice-colonne des inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Etape 3 : Produit matrice-matrice

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Le produit $C = AB$ est la matrice de taille $n \times q$ telle que C_{ij} est le produit de la i-ième ligne de A avec la j-ième colonne de B :



Autrement dit, pour $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq q$

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.} \tag{1}$$

Exemple 11

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}), B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}).$$

Alors

$$AB = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$$

Observation : *En revanche, le produit BA n'est pas défini.*

Produit matriciel et opérations sur les lignes

⇝ Les opérations sur les lignes d'un système sont représentées par des produits matriciels de la matrice des coefficients avec certaines matrices, qu'on appelle les **matrices élémentaires**.

Echange de lignes : Considérons la matrice $E_{12} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors, si on considère par exemple une matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, on a

$$E_{12}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}$$

Tiens, au fait... Qu'est-ce que ça donne, AE_{12} ?

Multiplication d'une ligne par $\alpha \neq 0$: Considérons la matrice $D_2(\alpha) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$D_2(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, on a

$$D_2(\alpha)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \alpha b_1 & \alpha b_2 & \alpha b_3 & \alpha b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}$$

Tiens, au fait... Qu'est-ce que ça donne, $AD_2(\alpha)$?

Ajout à une ligne de λ fois une autre : On définit $T_{34}(\lambda)$:

$$T_{34}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, on a

$$T_{34}(\lambda)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & d_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & d_4 \\ c_1 + \lambda d_1 & c_2 + \lambda d_2 & c_3 + \lambda d_3 & c_4 + \lambda d_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}$$

Tiens, au fait...

$\rightsquigarrow$ Résoudre un système revient à multiplier la matrice des coefficients par des matrices élémentaires, jusqu'à obtenir une matrice **échelonnée réduite** :

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \dots & & * \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pièges du produit matriciel

⚠ En général, le produit de matrices n'est pas commutatif :

- Il se peut que AB soit défini mais pas BA.
- Il se peut que AB et BA n'aient pas la même taille.

  Contre-exemple : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors

  $$AB = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} \text{ est de taille } \boxed{\qquad\qquad}, BA = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} \text{ est de taille } \boxed{\qquad\qquad}$$

- Il se peut que AB et BA aient la même taille mais $AB \neq BA$:

  Contre-exemple : Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, alors

  $$AB = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$

⚠ On peut avoir $A \neq 0_{n,p}$, $B \neq 0_{p,q}$ mais $AB = 0_{nq}$:

Contre-exemple : Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors :

$$AB = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$

⚠ On peut avoir $AB = AC$ mais $B \neq C$:

Contre-exemple : Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Alors

$$AB = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}, \quad AC = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$

Proposition 12 (***Ce qui se passe bien***)

- *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors pour tout $q \in \mathbb{N}$, $0_{qn} \cdot A = 0_{qp}, A \cdot 0_{pq} = 0_{nq}$.*
- Associativité : *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Alors* $\boxed{(AB)C = A(BC)}$.
- Distributivité 1 : *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B, C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors* $\boxed{A(B+C) = AB + AC}$.
- Distributivité 2 : *Soient $B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors* $\boxed{(B+C)A = BA + CA}$.

La matrice identité

Définition 13

On appelle ***matrice identité de taille*** n, *notée* I_n, *la matrice carrée*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Ses coefficients sont notés δ_{ij} *et sont donc donnés par :*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Proposition 14

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Alors* $I_n A = A$ *et* $A I_p = A$.

Preuve :[1]

Puissances d'une matrice carrée

Définition 15

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On définit les puissances successives de* A *par*

$$A^0 = I_n,\ A^{k+1} = A^k \cdot A.$$

1. *Indication :* Puisqu'on a la formule de δ_{ij}, on peut utiliser la formule du coefficient i, j du produit matriciel : c'est l'équation (1)

Exemple 16

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$. *Alors*

$$A^2 = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

Montrer que $A^k = 0$ *pour tout* $k \geq 2$.

Remarque 17

Comme le montre l'exemple précédent, on peut avoir $A^p = 0$ *mais* $A \neq 0$.

On dit dans ce cas que A *est* ***nilpotente***.

Formule du binôme

Proposition 18

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telles que* $AB = BA$. *Alors*

$$\forall p \in \mathbb{N}, \; (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$$

Remarque 19

Cette formule n'est pas vraie si $AB \neq BA$ *:*

Contre-exemple : *Soient* $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, *alors*

$$(A+B)^2 = \underbrace{\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}}_{A+B}\underbrace{\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}}_{A+B} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix},$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \underbrace{\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}}_{A^2} + 2\underbrace{\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}}_{AB} + \underbrace{\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}}_{B^2} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

Inverse d'une matrice carrée

Définition 20

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **inversible** *s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. On dit que B est un* **inverse** *de A.*

Proposition 21

Si A est inversible, son inverse est unique. On le note A^{-1}.

Preuve : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Supposons qu'il existe deux matrices B et C telles que

$$AB = AC = I_n, \quad BA = CA = I_n$$

Montrons que $B = C$. Or, on a

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C,$$

ce qu'il fallait trouver. □

Exemple 22

1. *I_n est inversible, d'inverse I_n.*
2. *$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En effet,*

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \qquad\qquad \\ \\ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \qquad\qquad \\ \\ \end{pmatrix}$$

Remarque 23

Toutes les matrices ne sont pas inversibles :
Déjà, la matrice nulle ne l'est pas puisque pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $0 \cdot B = 0 \neq I_n$.

Il existe des matrices ***non nulles*** *qui ne sont néanmoins pas inversibles.*
Par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. Si elle l'était, il existerait $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2 \iff \begin{pmatrix} \qquad\qquad \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut au système

$$\left\{ \begin{array}{l} \qquad\qquad = 1 \\ \qquad\qquad = 0 \\ \qquad\qquad = 0 \\ \qquad\qquad = 1 \end{array} \right. \rightsquigarrow \textit{impossible}$$

De plus si A était inversible, on aurait, pour tous $B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$AB = AC \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{=I_2}B = \underbrace{A^{-1}A}_{=I_2}C \Rightarrow B = C$$

et on a vu plus haut que ce n'était pas le cas.

Propriétés de l'inverse

Proposition 24

1. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *inversible, alors* A^{-1} *est aussi inversible et* $\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$.
2. *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *inversibles, alors* AB *est inversible et* $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$.
3. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *inversible, alors pour tout* $p \geq 0$, A^p *est inversible et* $\boxed{(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p}$.
4. *Soient* $M, N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Alors*
   - *Soit* $C_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *inversible,* $C_1A = C_1B \Rightarrow A = B$.
   - *Soit* $C_2 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ *inversible,* $AC_2 = BC_2 \Rightarrow A = B$.

Preuve :

Calcul d'inverse

Proposition 25

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$. *Alors, si* $ad - bc \neq 0$, A *est inversible et*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Preuve : On calcule :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)I_2$$
$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)I_2$$

□

Cas général : méthode de Gauss

Soit A une matrice carrée inversible. On va calculer son inverse comme suit :

- On écrit la matrice identité I_n à droite de A :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

- On applique des opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice augmentée jusqu'à obtenir

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right)$$

- On a alors $B = A^{-1}$

Les opérations élémentaires sont les mêmes que pour les systèmes linéaires :

- Echange de lignes $L_i \leftrightarrow L_j$
- Pour $\alpha \neq 0$, $L_i \leftarrow \alpha L_i$
- Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $j \neq i$, $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

$\rightsquigarrow$ On les applique de façon à se ramener à une matrice triangulaire dans la moitié gauche de la matrice augmentée ($\iff$ échelonnage de systèmes linéaires), puis pour “remonter”.

Remarque 26

En fait, cela revient à multiplier A par des matrices élémentaires (celles vues lorsqu'on a fait le lien entre produit matrice-matrice et résolution de système), jusqu'à ce qu'on ait un truc du genre

$$T_{12}(-2)D_2(-\pi)T_{23}(5)T_{13}(-1)D_3(2)T_{32}(37)T_{31}(1)T_{21}(-4)A = I_n$$

et alors on a

$$T_{12}(-2)D_2(-\pi)T_{23}(5)T_{13}(-1)D_3(2)T_{32}(37)T_{31}(1)T_{21}(-4)I_n = A^{-1}.$$

Exemple 27

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. *Calculons A^{-1} par cette méthode :*

.

Application à la résolution de systèmes

Un système linéaire à n équations et p inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

peut se réécrire sous la forme $AX = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Si $n = p$ et si A est inversible, alors ceci équivaut à $X = A^{-1}B$: il y a alors une unique solution au système.

Vocabulaire

Définition 28

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- *On dit que A est **triangulaire supérieure** si tous les éléments au-dessous de la diagonale sont nuls : $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$*
- *On dit que A est **triangulaire inférieure** si tous les éléments au-dessus de la diagonale sont nuls : $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$*
- *On dit que A est **diagonale** si tous les éléments en dehors de la diagonale sont nuls : $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & * & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{Triangulaire sup}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & * & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{Triangulaire inf}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{Diagonale}}$$

Définition 29

*Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La **transposée** de A, notée ${}^tA$, est la matrice de taille $p \times n$ dont le (i,j)-ième coefficient est a_{ji}. Ainsi,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & \cdots & a_{n-1,p} & a_{np} \end{pmatrix}$$

Exemple 30

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad {}^tA = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Proposition 31

1. *${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$, ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$*
2. *${}^t({}^tA) = A$*
3. *${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$ (vérifiez que les tailles marchent bien !)*
4. *Si A est inversible, ${}^tA$ aussi et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.*

Preuve : [2]

Définition 32

- *Une matrice A est dite* ***symétrique*** *si ${}^tA = A$.*
- *Une matrice A est dite* ***antisymétrique*** *si ${}^tA = -A$*

Exemple 33

$\begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}$ *est symétrique,* $\begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}$ *est antisymétrique.*

Définition 34

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. La ***trace*** *de A est la somme des coefficients diagonaux de A*

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=0}^{n} a_{ii}$$

Exemple 35

$$Tr\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & -4 \\ 6 & 4 & 8 & -10 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \\ -9 & 5 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \boxed{}.$$

2. *Indication :* Pour 1., d'après la définition 5 quels sont les coefficients de ${}^tA + {}^tB$? de $\lambda {}^tA$? Pour 3., utiliser la formule qui donne les coefficients de ${}^tA$ et la formule du produit matriciel (1). Pour 4., en utilisant (3.), calculer ${}^tA {}^t(A^{-1})$ et ${}^t(A^{-1}) {}^tA$.

Proposition 36

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$. *On a :*

1. $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$, $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$
2. $Tr({}^t A) = Tr(A)$
3. $Tr(AB) = Tr(BA)$

Preuve : [3]

Petit exercice : Calculer la transposée et la trace des matrices croisées dans ce chapitre (quand elles existent !)

3. *Indication :* Pour 3., utiliser la formule (1) qui donne $(AB)_{ij}$, pour obtenir les $(AB)_{ii}$.