Chapitre III - Espaces vectoriels

Dans ce chapitre, on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Motivation

Sur des objets mathématiques très différents, on peut effectuer des opérations similaires :

1. Polynômes :

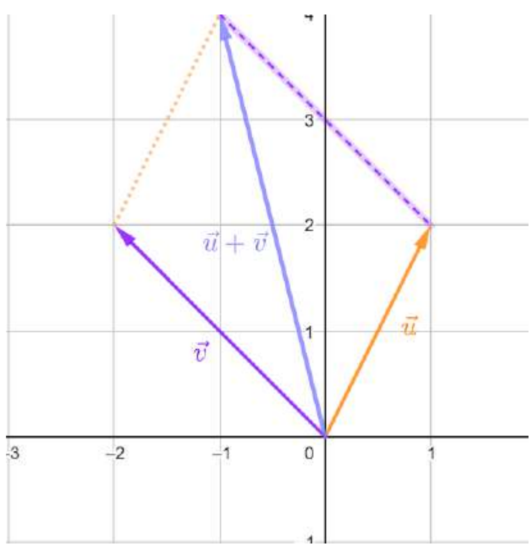
On note $\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
$\triangleright$ On peut sommer deux polynômes de degré 3 :

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3,\ Q = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$$
$$\rightsquigarrow P + Q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + (a_3 + b_3)X^3$$

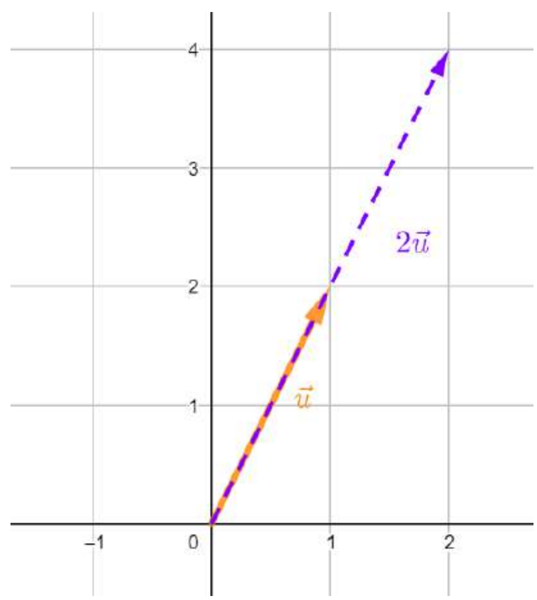
$\triangleright$ On peut multiplier un polynôme de degré 3 par un réel λ :

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3,\ \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\rightsquigarrow \lambda P = \lambda a_0 + \lambda a_1X + \lambda a_2X^2 + \lambda a_3X^3$$

2. Vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$:



On peut additionner deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$



On peut multiplier un vecteur $\vec{u}$ par un scalaire λ.

3. Matrices de taille $n \times p$: Par exemple, dans $M_{3,2}(\mathbb{R})$

- On peut sommer deux matrices 3×2 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}, \ A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{pmatrix}$$

- On peut multiplier une matrice 3×2 par un complexe λ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{C} \ \rightsquigarrow \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} \end{pmatrix}$$

Mais ce n'est pas tout ! On peut aussi faire ce type d'opérations sur les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (un ensemble qu'on note $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$) ou $I \to \mathbb{R}$, ou $I \to \mathbb{R}^2$ [1], les suites de réels (qui forment l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$)...

Propriétés communes à toutes ces opérations

Pour chacun de ces ensembles E,

(A1) (Associativité) $\forall u, v, w \in E, (u + v) + w = u + (v + w)$;

(A2) (Element neutre) Il existe un élément $0_E \in E$ tel que

$$\forall u \in E, u + 0_E = 0_E + u = u;$$

(A3) (Opposé) Chaque élément $u \in E$ a un *opposé* :

$$\forall u \in E, \exists u' \in E, u + u' = 0_E;$$

(A4) (Commutativité) $\forall u, v \in E, u + v = v + u$.

(M1) Pour tout $u \in E$, $1 \cdot u = u$;

(M2) Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu \cdot u)$

(M3) Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, pour tout $u \in E$, $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$;

(M4) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tous $u, v \in E$, $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

$\rightsquigarrow$ Les ensembles E sont très différents, mais les *opérations* $u + v$ et $\lambda \cdot u$ ont des propriétés similaires.

1. Plus généralement, si E_1 et E_2 sont deux espaces vectoriels et $A \subset E_1$ n'importe quel sous-ensemble, alors l'ensemble des fonctions $A \to E_2$ est un espace vectoriel

Espaces vectoriels : définitions

> La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes. Quand le langage a été bien choisi, on est tout étonné de voir que toutes les démonstrations, faites pour un objet connu s'appliquent immédiatement à beaucoup d'objets nouveaux. On n'a rien à y changer, pas même les mots, puisque les noms sont devenus les mêmes.
>
> *Henri Poincaré*
> *Science et méthode*

Définition 1

*Un $\mathbb{K}$-**espace vectoriel** est un ensemble $E \neq \varnothing$ muni de deux opérations*

- *Une addition interne $(u,v) \in E \times E \mapsto u+v \in E$ qui vérifie les propriétés (A1), (A2), (A3), (A4) ;*
- *Une multiplication externe $(\lambda, u) \in \mathbb{K} \times E \mapsto \lambda u \in E$ qui vérifie les propriétés (M1), (M2), (M3), (M4)*

*Les élements de E sont appelés les **vecteurs**, les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les **scalaires**.*
*L'élément 0_E est appelé le **vecteur nul** et l'opposé d'un vecteur $u \in E$ est noté $-u$.*

Exemples fondamentaux

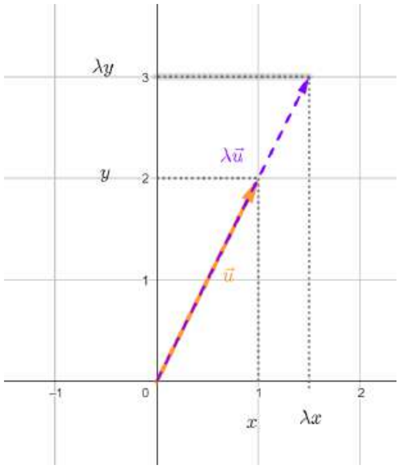
1. $\mathbb{R}^2 = \{(x,y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

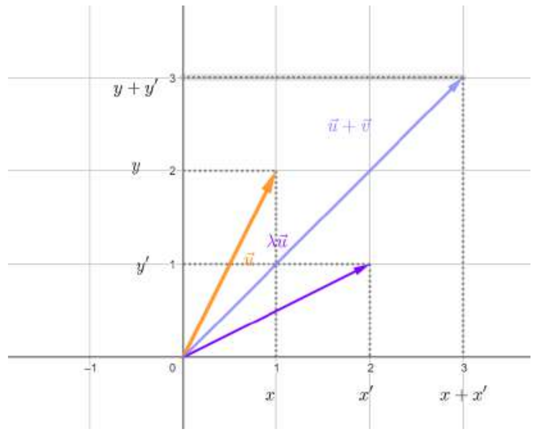
   - L'addition sur $\mathbb{R}^2$ est donnée par
   $$\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$$
   - La multiplication externe est donnée par
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$
   - Le vecteur nul est $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$.
   - L'opposé d'un couple (x,y) est $(-x,-y)$.

   $\rightsquigarrow$ On vérifie que ces deux opérations vérifient (A1), (A2), (A3), (A4), (M1), (M2), (M3), (M4).

2. De même $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}\ \forall i = 1, \dots, n\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

   - L'addition sur $\mathbb{R}^n$ est donnée par
   $$(x_1, \dots, x_n) + (x'_1, \dots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n)$$
   - La multiplication externe est donnée par
   $$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$





- Le vecteur nul est $0_{\mathbb{R}^n} = (0, \dots, 0)$.
- L'opposé de $(x_1, \dots, x_n)$ est $(-x_1, \dots, -x_n)$.

$\rightsquigarrow$ On vérifie que ces deux opérations vérifient (A1), (A2), (A3), (A4), (M1), (M2), (M3), (M4).

3. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : l'addition et la multiplication par un scalaire $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sur ont été décrites au chapitre 2, et on a aussi introduit la matrice nulle $0_{n,p}$ et l'opposé $-A$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

⚠ L'ensemble de toutes les matrices n'est pas un espace vectoriel : on ne peut pas sommer

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 158 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 & 9 & 26 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

4. L'ensemble $\mathbb{K}_d[X]$ des polynômes de degré $\leq d$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel :

- L'addition sur $\mathbb{K}_d[X]$ est donnée par

$$\sum_{k=0}^{d} a_k X^k + \sum_{k=0}^{d} b_k X^k = \sum_{k=0}^{d} (a_k + b_k) X^k$$

- La multiplication externe est donnée par

$$\lambda \sum_{k=0}^{d} a_k X^k = \sum_{k=0}^{d} (\lambda a_k) X^k$$

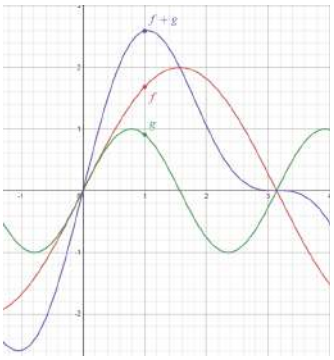
- Le vecteur nul est $0_{\mathbb{K}_d[X]} = 0 + 0X + \dots + 0X^d$.
  ⚠Ne pas confondre le réel 0 et le polynôme nul, qui est un polyôme !
- L'opposé de $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k = a_0 + a_1 X + \ldots + a_d X^d$ est $-P = \sum_{k=0}^{d} (-a_k) X^k = -a_0 - a_1 X - \ldots - a_d X^d$.

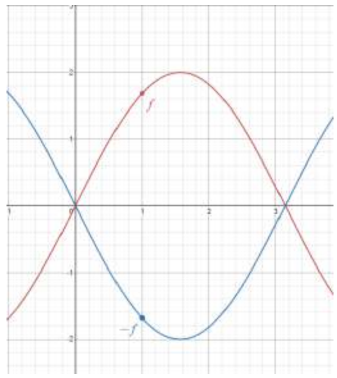
5. L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

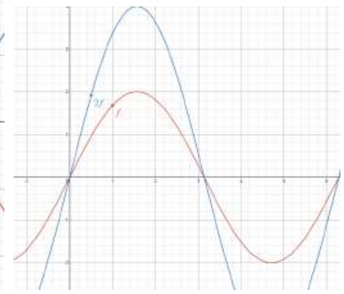
- L'addition sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est donnée, $\forall f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, par

$$f + g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) + g(x) \in \mathbb{R}$$

- La multiplication externe est donnée $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par
$$\lambda f : x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda f(x) \in \mathbb{R}$$
- Le vecteur nul est la fonction constante nulle $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} : x \in \mathbb{R} \mapsto 0 \in \mathbb{R}$.
⚠Ne pas confondre le réel 0 et la fonction nulle , qui est, eh bien, une fonction !







Premières propriétés

Proposition 2 (*Propriétés de base*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on a

1. $\forall u \in E, 0 \cdot u = 0_E$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.
3. $\forall u \in E, (-1) \cdot u = -u$.
4. $\lambda u = 0_E \iff \lambda = 0$ *ou* $u = 0_E$

Preuve :

Sous-espaces vectoriels

Question : Quels sous-ensembles de E sont, eux aussi, des espaces vectoriels ?

Définition 3

*Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. On dit que $F \subset E$ est un **sous-espace vectoriel** de E si*

1. $F \neq \varnothing$, *2.$\forall u, v \in F$, $u + v \in F$,* *3. $\forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda u \in F$.*

Ainsi les opérations sur E se restreignent à F :

$$\begin{aligned} F \times F &\to F \\ (u,v) &\mapsto u+v \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{K} \times F &\to F \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda u \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ F, avec ces deux opérations, est alors un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 4

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Alors $0_E \in F$.

Preuve :

Proposition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $F \subset E$. Alors F est un sous-espace-vectoriel ssi

1. $0_E \in F$ *2. $\forall u, v \in F$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $u + \lambda v \in F$*

Preuve : [2]

2. *Indication :* On le fait par double implication.

Exemple 6

1. $\{0_E\}$ *est un s.e.v. de* E.

   ⚠*Ne pas confondre :* $\{0_E\} \neq \varnothing$ *!*

2. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x+3y=0\}$ *est un s.e.v. de* $\mathbb{R}^2$. *En effet,*

   - $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$ *vérifie* $2*0+3*0=0$ *donc* $0_{\mathbb{R}^2} \in F$.
   - *Soient* $u_1 = (x_1,y_1), u_2 = (x_2,y_2) \in F, \lambda \in \mathbb{K}$. *Alors* $u_1 + \lambda u_2 = (x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2)$ *vérifie*

   $$2(x_1+\lambda x_2)+3(y_1+\lambda y_2) = \underbrace{(2x_1+3y_1)}_{=0 \text{ car } u_1 \in F} + \lambda \underbrace{(2x_2+3y_2)}_{=0 \text{ car } u_2 \in F} = 0$$

   donc $u_1 + \lambda u_2 \in F$.

   $\rightsquigarrow$ F *est un sous-espace vectoriel.*

3. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. *Alors l'ensemble des solutions du système homogène*

   $$H = \{X \in \mathbb{R}^p, AX = 0_{\mathbb{R}^n}\}$$

   est un s.e.v. de $\mathbb{R}^p$. *En effet :*

   - $0_{\mathbb{R}^p}$ *vérifie* $A0_{\mathbb{R}^p} = 0_{\mathbb{R}^n}$ *donc* $0_{\mathbb{R}^p} \in H$.
   - *Soient* $X, X' \in H$ *et* $\lambda \in H$. *Alors*

   $$A(X+\lambda X') = AX + A(\lambda X') = AX + \lambda AX' = 0_{\mathbb{R}^n} + \lambda 0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n},$$

   donc $X + \lambda X' \in H$.

   $\rightsquigarrow$ H *sous-espace vectoriel.*

Exemple 7 (*Contre-exemples*)

1. $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=3\}$ *n'est pas un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *puisque* $0_{\mathbb{R}^3} \notin P$.

   Remarque : P ne vérifie pas non plus l'autre propriété : prenons $u = (1,1,1), v = (0,0,3)$ *et* $\lambda = 2$.

   $\rightsquigarrow$ $u \in F$ *: Vrai* □ *Faux* □ *;* $v \in F$ *: Vrai* □ *Faux* □ *;* $u + 2v \in F$ *: Vrai* □ *Faux* □.

2. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y\}$ *n'est pas un s.e.v. de* $\mathbb{R}^2$. *En effet, pour* $u = (-1,1), \lambda = -1$ *:*

   $u \in A$ *: Vrai* □ *Faux* □ *;* $\lambda u \in A$ *: Vrai* □ *Faux* □.

Opérations ensemblistes et s.e.v.

Proposition 8

Le complémentaire d'un s.e.v. n'est jamais un s.e.v.

Preuve :[3]

Proposition 9

Soient F, G deux s.e.v. d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. Alors $F \cap G$ est un s.e.v. de E.

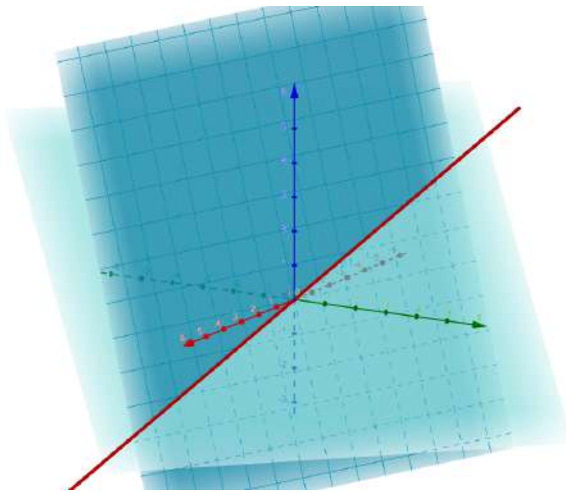
Preuve :

3. *Indication :* Quel élement doit contenir tout s.e.v. qui se respecte ?

Exemple 10

Considérons, dans $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+3y+z=0 \text{ et } x+y+2z=0\} \\ &= \underbrace{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+3y+z=0\}}_{P_1} \cap \underbrace{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+2z=0\}}_{P_2} \end{aligned}$$



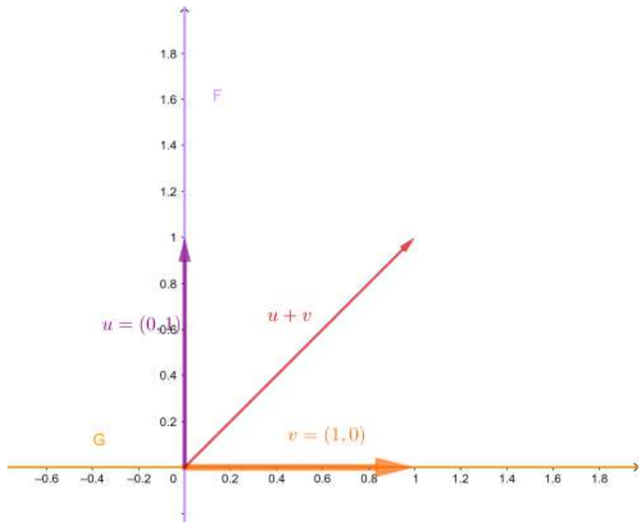
Alors P_1 *et* P_2 *sont des s.e.v. de* $\mathbb{R}^3$ *:*

$\rightsquigarrow$ *donc* D *est un s.e.v. de* $\mathbb{R}^3$.

⚠ En revance, l'union de 2 s.e.v n'est généralement pas un s.e.v.

Exemple 11 (***Contre-exemple***)

$$F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x=0\},\qquad G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, y=0\}$$



Prenons $u=(0,1), v=(1,0)$, *alors*

$u\in F\cup G$: *Vrai* □ *Faux* □ ; $v\in F\cup G$: *Vrai* □ *Faux* □ ; $u+v\in F\cup G$: *Vrai* □ *Faux* □.

Somme de s.e.v.

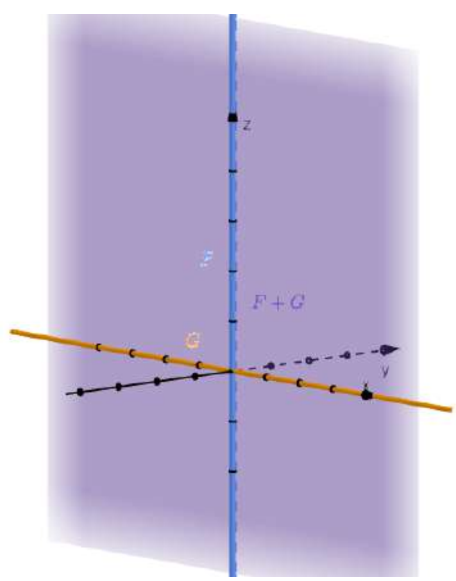
Définition 12

Soient F,G *deux s.e.v d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E. *On appelle* ***somme*** *de* F *et* G *le sous-ensemble*

$$F+G=\{u+v, u\in F, v\in G\}\subset E.$$

Exemple 13

$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, y=z=0\}$,
$G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x=z=0\}$.
⇝ *Montrons que* $F+G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, z=0\}$.



Proposition 14

1. *$F+G$ est un s.e.v. de E.*
2. *$F+G$ est le plus petit s.e.v. de E qui contient $F\cup G$.*

Preuve :

Somme directe

Définition 15

Soient F,G deux s.e.v. de E. On dit que F et G sont ***supplémentaires****, ou* ***en somme directe****, dans E, si*

- $F\cap G=\{0_E\}$
- $F+G=E$.

On note alors $E=F\oplus G$.

Proposition 16

Soient F, G deux s.e.v. de E, alors

$$E = F \oplus G \iff \forall w \in E,\ \textit{il existe un unique couple } (u,v) \in F \times G \\ \textit{tel que } w = u + v.$$

Preuve :

Remarque 17

Plus généralement, si $F_1, \ldots, F_k$ sont des s.e.v. de E, on dit que E ***est somme directe de*** *$F_1, \ldots, F_k$ si pour tout vecteur $w \in E$, il existe un unique k-uplet $(v_1, \ldots, v_k) \in F_1 \times \ldots \times F_k$ tel que $w = v_1 + \ldots + v_k$.*

Exemple 18

On considère les s.e.v. de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = 0\}, \quad G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = 0\}, \quad G' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$$

Alors $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$ et $\mathbb{R}^2 = F \oplus G'$. En effet :

.

Sous-espace vectoriel engendré

Définition 19 (***Combinaison linéaire***)

Soient $u_1, \ldots, u_p, v$ des vecteurs de E. On dit que v est ***combinaison linéaire*** *de $u_1, \ldots, u_p$ s'il existe p scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que*

$$v = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p$$

Exemple 20

1. *Dans $\mathbb{R}^2$,*

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   donc $(2,3)$ est combinaison linéaire de $(1,1)$ et $(0,1)$.

2. *Dans $\mathbb{R}_2[X]$, le polynôme $P(x) = 3x^2 + 4x + 1$ est combinaison linéaire de $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ et $P_2(x) = x^2$:*

$$P = P_0 + 4P_1 + 3P_2$$

Lien avec les systèmes

Considérons un système linéaire :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcl} 14x & + & 2y & = & b_1 \\ 21x & + & \sqrt{\pi} y & = & b_2 \\ 3x & + & 3y & = & b_3 \end{array} \right.$$

On note $u = (14, 21, 3)$, $v = (2, \sqrt{\pi}, 3)$ et $w = (b_1, b_2, b_3)$. Alors (S) équivaut à $xu + yv = w$.

$\rightsquigarrow$ Le système a des solutions si, et seulement si ; le vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire des vecteurs u et v.

Proposition 21

Soit $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset E$. Alors

- *l'ensemble des combinaisons linéaires des v_i est un s.e.v. de E*
- *c'est le plus petit s.e.v. qui contient $\{v_1, \ldots, v_n\}$.*

On note cet ensemble $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$ et on l'appelle ***le sous-espace vectoriel engendré par*** *$v_1, \ldots, v_n$.*

On a donc $u \in \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n) \iff \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$.

Définition 22

Plus généralement, si $A \subset E$ alors

$$\mathrm{Vect}(A) := \{v \in E, \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \exists\ a_1, \ldots, a_n \in A, u = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n\}$$

est un s.e.v., et c'est le plus petit s.e.v. qui contient A.

Preuve de la proposition

Notons F l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $v_1, \ldots, v_n$:

$$F = \{u \in E, \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n\}$$

On va montrer que

1. F est un s.e.v.
2. Si $G \subset E$ est un s.e.v. contenant $\{v_1, \ldots, v_n\}$, alors $F \subset G$.

Exemple 23

Dans $E = \mathbb{R}^3$, *prenons* $v_1 = (1, 0, 3), v_2 = (-1, 1, 3)$. *Déterminons* $\mathrm{Vect}(v_1)$ *et* $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.