Chapitre IV - Bases et dimension

Introduction

Dans ce chapitre, comme toujours, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est l'ensemble des scalaires, et E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

A la fin du chapitre III, on a introduit la notion d'**espace vectoriel engendré** $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$.

Si $E = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$, alors tout vecteur de E est une combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_p$:

$$\forall u \in E,\ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}^p \text{ t.q. } u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p$$

$\rightsquigarrow$ Dans ce cas, pour montrer une propriété sur E, il suffit souvent de le faire sur les $(v_1, \ldots, v_p)$, qui sont en nombre fini.

Dans ce chapitre, on verra donc :

- Quelles familles de vecteurs engendrent E ?
- Comment choisir la plus petite famille possible ?
- Quel rapport avec la notion de dimension ?

Familles génératrices

Définition 1

*Une famille de vecteurs $\mathcal{F} \subset E$ est dite **génératrice** si $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. Autrement dit :*

$$\forall\, v \in E,\ \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \exists v_1, \ldots, v_p \in \mathcal{F}$$
$$t.q.\ v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p.$$

*Si E admet une famille génératrice **finie**, on dit que E est **de dimension finie**.*

*Si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel, on dit que $\{v_1, \ldots, v_p\} \subset F$ est une **famille génératrice de F** si $F = \mathrm{Vect}(v_1, ..., v_p)$.*

Méthode : Pour montrer qu'une famille finie $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est génératrice, il suffit de montrer que $E \subset \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$ [a]. On prend donc $v \in E$ quelconque, et on cherche des scalaires $(\lambda_i)_{i=1\ldots p}$ tels que $v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i$.

a. L'autre inclusion est toujours vraie.

Exemple 2

1. *$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est génératrice dans $\mathbb{R}^2$: si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, alors*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2 \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2).$$

2. $\left\{e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ *est aussi génératrice :*

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = xe_1 + ye_2 + 0v_3 \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, v_3).$$

mais aussi

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0e_1 + (y-2x)e_2 + xv_3 \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, v_3).$$

Par exemple :

$$\begin{pmatrix}27\\31\end{pmatrix} = \boxed{} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \boxed{} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \boxed{} \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \boxed{} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \boxed{} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \boxed{} \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

3. $\left\{v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ *est génératrice dans* $\mathbb{R}^2$ *:*

4. $\left\{f_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ *n'est pas génératrice dans* $\mathbb{R}^3$*. En effet,* $u = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \notin \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ *:*

Entraînement 3

En revanche, $\{f_1, f_2\}$ est une famille génératrice de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y - z = 0\}$:

Méthode : Dans $\mathbb{R}^n$, pour montrer l'existence (ou la non-existence !) des scalaires (λ_i), on se ramène à un système d'équations linéaires.

Moralité : On apprend de ces exemples :

- Qu'un même espace vectoriel peut avoir plusieurs familles génératrices différentes.
- Que **toute famille qui contient une famille génératrice est génératrice** : on peut toujours ajouter des vecteurs avec un coefficient 0.
- Que pour une même famille génératrice $(v_1, \dots, v_p)$, un vecteur donné peut avoir plusieurs décompositions en combinaison linéaires des (v_i).

Questions :

- Comment repérer les vecteurs en trop ?
- Peut-on choisir la famille génératrice de façon à avoir une unique décomposition pour chaque vecteur ?

Proposition 4

Soit $\{v_1, \dots, v_p\}$ une famille génératrice telle que v_p soit combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_{p-1}$.

Alors $\{v_1, \dots, v_{p-1}\}$ est encore génératrice.

Preuve :

Exemple 5

Reprenons la famille génératrice $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ *de* $\mathbb{R}^2$.

Alors on a d'une part $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{}$, *donc* $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, v_3) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

Mais aussi $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{}$ *donc* $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, v_3) = \mathrm{Vect}(e_2, v_3)$.

On sait maintenant enlever les vecteurs inutiles. Mais comment savoir quand s'arrêter ?

$\rightarrow$ Y a-t-il une condition simple qui garantisse qu'aucun v_i n'est combinaison linéaire des autres ?

On va voir que c'est la notion de **famille libre** qui répond à cette question.

Familles libres

Soit $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$. Remarquons que, si un des vecteurs (disons v_{i_0}) est combinaison linéaire des autres, alors on a

$$v_{i_0} = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_{i_0-1} v_{i_0-1} + \lambda_{i_0+1} v_{i_0+1} + \ldots + \lambda_p v_p$$

donc

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_{i_0-1} v_{i_0-1} - v_{i_0} + \lambda_{i_0+1} v_{i_0+1} + \ldots + \lambda_p v_p = 0_E$$

$\rightsquigarrow$ $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{i_0-1}, -1, \lambda_{i_0+1}, \ldots, \lambda_p)$ est une solution non nulle du système homogène

$$x_1 v_1 + ... + x_{i_0-1} v_{i_0-1} + x_{i_0} v_{i_0} + x_{i_0+1} v_{i_0+1} + \ldots + x_p v_p = 0_E$$

$\rightsquigarrow$ S'il y a des vecteurs "en trop" alors ce système homogène a des solutions non nulles.

$\rightarrow$ On va voir que la réciproque marche aussi.

Définition 6

Une famille de vecteurs $\{v_1, \ldots, v_p\} \subset E$ *est dite* ***libre*** *si*

$$(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p = 0_E) \iff (\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0).$$

Une famille qui n'est pas libre est dite ***liée***. *Donc,* $\{v_1, \ldots, v_p\}$ *est liée ssi il existe* $\lambda_1 \ldots, \lambda_p$ non tous *nuls tels que* $\sum \lambda_i v_i = 0_E$.

⚠ Ne pas confondre "non tous nuls" et "tous non nuls" : Si par exemple $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 137.9$ alors les λ_i sont *non nous nuls*, mais il ne sont pas *tous non nuls*.

Méthode : Pour savoir si une famille est libre, on suppose que

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p = 0_E$$

En général, en utilisant les coordonnées des v_i, cela signifie que les scalaires λ_i sont solutions d'un système linéaire homogène.

$\rightsquigarrow$ Il s'agit alors de vérifier si $(0, \ldots, 0)$ est, ou non, la seule solution de ce système.

- Si oui, la famille est libre ;
- Si non, alors le système a une infinité de solutions, et donc pour l'une de ces solutions, au moins l'un des λ_i est différent de 0, autrmeent dit les λ_i sont non tous nuls. Donc la famille est liée.

Exemple 7

1. $\left\{v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ *est libre dans* $\mathbb{R}^2$ *:*

2. $\{P_1(X) = X^2 - 3, P_2(X) = X + 2\}$ *est une famille libre de* $\mathbb{R}_2[X]$ *: Soient* λ_1, λ_2 *tels que* $\lambda_1 P_1(X) + \lambda_2 P_2(X) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$*, i.e.*

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 X - 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

⚠ *Ne pas confondre le* polynôme *nul* $0_{\mathbb{R}_2[X]}$ *et le* réel *0 ! Ici, il ne s'agit pas de déterminer les racines de* $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 X - 3\lambda_1 + 2\lambda_2$.

3. $\left\{e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ *n'est pas libre :*

Proposition 8

1. *Soit* $v \in E$ *quelconque. Alors la famille* $\{v\}$ *est libre ssi* $v \neq 0_E$.
2. *Soient* $u, v \in E$. *Alors la famille* $\{(u, v)\}$ *est liée ssi* u *et* v *sont colinéaires.*
3. *Toute famille qui contient* 0_E *est liée.*

Preuve :

Proposition 9

Soit $p \geq 2$. Une famille $\mathscr{F} = \{v_1, \ldots, v_p\}$ est liée ssi au moins l'un des v_i est combinaison linéaire des autres.

Preuve :

Remarque 10

Intuitivement, donc, si on part d'une famille génératrice, on peut enlever des vecteurs jusqu'à tomber sur une famille libre. A ce moment-là, la contraposée de la proposition précédente dit qu'aucun des vecteurs restants n'est combinaison linéaire des autres.

Bases

Définition 11

Une famille $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E est une **base de** *E si elle est à la fois libre et génératrice.*

Si $F \subset E$ est un s.e.v., une famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est une **base de** *F si elle est libre et si $F = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$.*

Proposition 12

Soit $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de E. Alors, pour tout vecteur $v \in E$, il existe un unique n-uplet de scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

On dit que le n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ sont les **coordonnées** *de v dans la base $\mathscr{B}$.*

Remarque 13

Pour que les coordonnées soient uniques, on choisit un ordre sur les vecteurs de $\mathcal{B}$. Ainsi, pour $n = 2$, $\{v_1, v_2\}$ et $\{v_2, v_1\}$ sont la même famille, mais (v_1, v_2) et (v_2, v_1) sont des bases différentes.

Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc les coordonnées de $(3,1)$ dans la base $((1,0),(0,1))$ sont $(3,1)$, et les coordonnées de $(3,1)$ dans la base $((0,1),(1,0))$ de $\mathbb{R}^2$ sont $(1,3)$

Preuve de la proposition :

Exemple 14

1. *$\left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. On a déjà vu que c'est une famille génératrice ; montrons qu'elle est libre. Supposons que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$, autrement dit*

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

   donc (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

   $\leadsto$ Dans cette base, les coordonnées de (x, y) sont... (x, y).

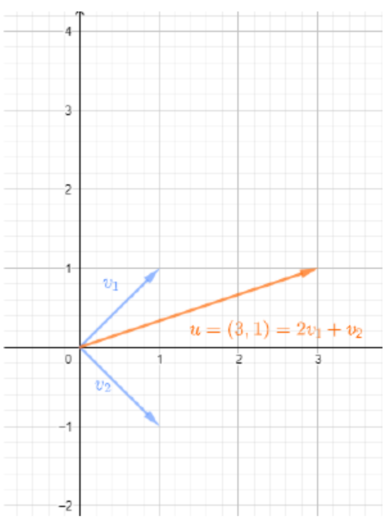
$\rightsquigarrow$ *Comme cette base nous donne des coordonnées particulièrement simples, c'est celle qu'on va utiliser par défaut : on l'appelle la* **base canonique** *de* $\mathbb{R}^2$.

2. *De même,* $\left(e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$ *et dans cette base, les coordonnées de* $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ *sont* (x, y, z) *:*

3. *Plus généralement,* $\left(e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $\mathbb{K}^n$*, appelée* **base canonique** *de* $\mathbb{K}^n$.

4. *On a vu que* $\left(v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ *est une famille libre et génératrice.*

   $\rightsquigarrow$ (v_1, v_2) *est une base de* $\mathbb{R}^2$*. Soit* $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$*, cherchons les coordonnées de* u *dans la base* (v_1, v_2) *:*



   Entraînement : *Quelles sont les coordonnées de* u *dans la base* (v_2, v_1) *?*

5. $(1, X, X^2)$ *est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$*. Dans cette base, les coordonnées du polynôme* $aX^2 + bX + c$ *sont* (a, b, c) *:*

Plus généralement $(1, X, \ldots, X^n)$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$*, qu'on appelle* **base canonique** *de* $\mathbb{K}_n[X]$.

6. *La famille ci-dessous est une base de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *:*

$$\left(E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

7. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y - z = 0\} = \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,0,1))$. *La famille* $\mathscr{B} = ((1,1,0),(1,0,1))$ *engendre* F. *Montrons qu'elle est libre :*

Existence de bases

Question : Etant donnée une famille libre ou génératrice, comment en déduire une base de E ?

Proposition 15

Supposons que E *soit de dimension finie, et soit* $\mathscr{G}$ *une famille génératrice finie. Soit* $\mathscr{L}$ *une famille libre. Alors il existe une sous-famille* $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ *telle que* $\mathscr{L} \cup \mathscr{F}$ *est une base de* E

Remarque 16

L'idée est donc de "piocher" des vecteurs dans $\mathscr{G}$ *et de les ajouter à* $\mathscr{L}$*, en s'assurant à chaque étape que la nouvelle famille est toujours libre (qu'on n'a pas introduit de vecteur "en trop"). Puisque* $\mathscr{G}$ *est génératrice et finie, au bout d'un moment, on aura pioché assez de vecteurs pour engendrer tous les autres.*

Corollaire 17

Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

Preuve de la proposition

On en déduit :

Théorème 18 (*Théorème de la base incomplète*)

Supposons que E est de dimension finie. Alors

- *Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.*
- *De toute famille génératrice, on peut extraire une base.*

Preuve :

- Le premier point est une reformulation du théorème précédent.
- Pour le second point : Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice. Alors il existe $g \in \mathscr{G}$ tel que $g \neq 0_E$. On applique alors le théorème précédent à la famille libre $\mathscr{L} = \{g\}$: cela donne une famille $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ telle que $\mathscr{F} \cup \{g\}$ soit une base de E. $\square$

Exemple 19

Considérons $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. *Comme* $v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, *la famille* $\mathscr{L} = \{v\}$ *est libre. Complétons-la en une base en utilisant la famille génératrice*

$$\mathscr{G} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dimension d'un espace vectoriel

Il semble donc que les familles génératrices soient parfois trop "grosses" pour être des bases, et les familles libres trop "petites".

La proposition suivante exprime cette idée en terme de nombre d'éléments :

Proposition 20

Soient $\mathscr{L}$ *une famille libre et* $\mathscr{G}$ *une famille génératrice. Alors*

$$\mathrm{Card}(\mathscr{L}) \leq \mathrm{Card}(\mathscr{G}).$$

Preuve :

Ce théorème nous permet de montrer :

Théorème 21

Supposons que E admette une base à n éléments. Alors

- *Toute famille libre de E a au plus n éléments ;*
- *Toute famille génératrice de E a au moins n éléments ;*
- *Toute base de E a exactement n éléments.*

On appelle ***dimension*** *de E le nombre d'éléments des bases de E.*

Preuve : Soit $\mathscr{B}$ une base de E à n éléments.

- Si $\mathscr{L}$ est une famille libre, puisque $\mathscr{B}$ est génératrice, on a par le théorème précédent $\mathrm{Card}(\mathscr{L}) \leq n$.
- Si $\mathscr{G}$ est une famille génératrice, puisque $\mathscr{B}$ est libre, on a par le théorème précédent $\mathrm{Card}(\mathscr{G}) \geq n$.
- Si $\mathscr{B}'$ est une base de E, alors elle est libre et génératrice, donc $n \leq \mathrm{Card}(\mathscr{B}') \leq n$; autrement dit, $\mathrm{Card}(\mathscr{B}') = n$. □

Exemple 22

1. *On a vu que pour tout n,*
$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
est une base de $\mathbb{K}^n$. Donc $\boxed{\dim \mathbb{K}^n = n}$.
2. *On a vu que pour tout n, $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Donc* $\boxed{\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1}$.
3. Exercice : *Montrer que pour tous entiers n, p, la famille $(E_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ des matrices dont les coefficients sont*
$$(E_{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 \text{ si } (i,j) = (k,l) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$
est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Donc $\boxed{\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np}$.

   Indication : *On a déjà vu la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Donc* $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{K})) = \boxed{}$.

Inversement, on a :

Proposition 23

Supposons que $\dim E = n$. *Soit* $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_n)$ *une famille à* n *éléments. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathscr{F}$ *est une base de* E *;*
2. $\mathscr{F}$ *est une famille libre ;*
3. $\mathscr{F}$ *est une famille génératrice.*

Preuve :

1) $\Rightarrow$ 2), 1) $\Rightarrow$ 3) découlent de la définition d'une base.

2) $\Rightarrow$ 1) Soit $\mathscr{F}$ une famille libre à n éléments. Alors, par le théorème de la base incomplète, il existe une famille de vecteurs $\mathscr{F}'$ telle que $\mathscr{F} \cup \mathscr{F}'$ soit une base de E. Mais alors $\mathrm{Card}(\mathscr{F} \cup \mathscr{F}') = n = \mathrm{Card}(\mathscr{F})$, donc $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$ et $\mathscr{F}$ est une base.

3) $\Rightarrow$ 1) Soit $\mathscr{F}$ une famille génératrice à n éléments. ALors, par le théorème de la base incomplète, il existe une base $\mathscr{B}$ telle que $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$. Mais alors $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = n = \mathrm{Card}(\mathscr{F})$, donc $\mathscr{B} = \mathscr{F}$ et $\mathscr{F}$ est une base. □

Méthode : Pour montrer qu'une famille à n éléments dans un e.v. de dimension n est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre <u>ou</u> génératrice. Dans la pratique, il est souvent plus simple de montrer qu'elle est libre.

Dimension et sous-espaces vectoriels

On l'a vu, si F est un sous-espace-vectoriel de $(E, +, \cdot)$, alors $(F, +, \cdot)$ est lui-même un espace vectoriel. On peut donc parler

- de famille génératrice de F : si $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$, alors $(u_1, \dots, u_k)$ est une famille génératrice de F
- de base de F : si $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ et si $(u_1, \dots, u_k)$ est libre, alors c'est une base de F
- de la dimension de F : c'est le cardinal de ses bases.

⚠ **Convention bizarre** ⚠ Si $F = \{0_E\}$, F est un s.e.v. mais aucune famille non vide de vecteurs de F n'est libre, donc aucune n'est une base.
⇝ On considère donc que $\varnothing$ est une "base" de F.
⇝ Si $F = \{0_E\}$, $\dim F = \mathrm{Card}\,\varnothing = 0$.

⚠ $\{0_E\} \neq \varnothing$!

Un résultat peu surprenant :

Proposition 24

Si E *est de dimension finie, tout sous-espace vectoriel* F *de* E *est aussi de dimension finie. De plus :*

1. $\dim F \leq \dim E$
2. $\dim F = \dim E$ *si et seulement si* $F = E$.

Puisque les sous-espaces vectoriels sont eux-mêmes des espaces vectoriels, on en déduit :

Corollaire 25

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \subset G$. Alors $\dim F \leq \dim G$, et $\dim F = \dim G$ ssi $F = G$.

Méthode : Pour montrer qu'un sous-espace vectoriel F est égal à E tout entier, il suffit de montrer que leurs dimensions sont égales.

Preuve de la proposition :

Exemple 26

Considérons $F = \operatorname{Vect}\left((1,2,1),(1,1,0)\right)$ et $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\right\}$. Montrons que $F = G$.

Somme et dimensions

Dans le chapitre précédent, on a introduit la somme de deux sous-espaces vectoriels F et G, ainsi que la décomposition de E en *somme directe* $F \oplus G$. En termes de dimensions, on a :

Proposition 27

Supposons que E est de dimension finie, et soient F, G deux sous-espaces vectoriels. Alors

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)}$$

En particulier, si $E = F \oplus G$,

$$\dim E = \dim F + \dim G$$

Corollaire 28

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie E. Alors tout supplémentaire de F est de dimension $\dim E - \dim F$.

Preuve de la proposition :

Base de $E = F \oplus G$

Si E se décompose de $F \oplus G$, on peut construire des bases de E à partir de celles de F et G :

Proposition 29

Les assertions suivantes sont équivalentes

1. $E = F \oplus G$
2. *pour toute base* $\mathscr{B}_F$ *de* F *et pour toute base* $\mathscr{B}_G$ *de* G*, alors* $\mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$ *est une base de* E*.*
3. *il existe* $\mathscr{B}_F$ *base de* F *et* $\mathscr{B}_G$ *base de* G *tq* $\mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$ *est une base de* E*.*

Preuve : On montre $\boxed{1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1}$

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ On procède comme dans la preuve du théorème précédent, avec cette fois $F \cap G = \{0\}$.
On a montré que si $\mathscr{B}_F = (v_1, \ldots, v_q)$ est une base de F et $\mathscr{B}_G = (w_1, \ldots, w_r)$ est une base de G alors $(v_1, \ldots, v_q, w_1, \ldots, w_r)$ est une base de $F + G = E$.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ ...ça, ça va.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ Soient $\mathscr{B}_F = (v_1, \ldots, v_q)$ une base de F, $\mathscr{B}_G = (w_1, \ldots, w_r)$ une base de G. Alors, par hypothèse $(v_1, \ldots, v_q, w_1, \ldots, w_r)$ est une base de E. Montrons que $E = F \oplus G$.

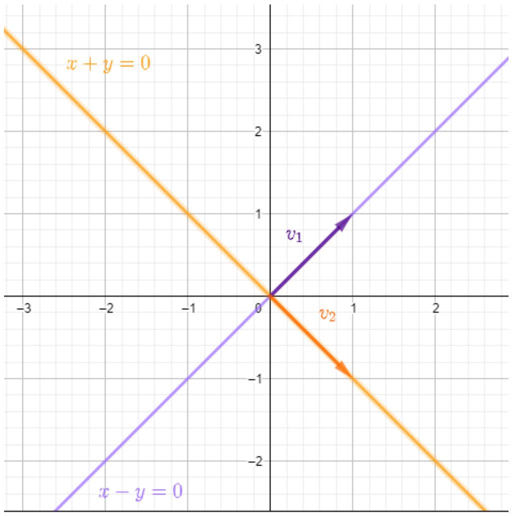
Exemple 30

Montrons que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$*, avec :*

$$F = \{(a, a, a) \in \mathbb{R}^3 : \ a \in \mathbb{R}\} \text{ et } G = \{(b + c, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \ b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Exemple 31

Ca marche dans les deux sens !



On a vu que $\left(v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$*. On en déduit que*

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &= \mathrm{Vect}((1,1)) \oplus \mathrm{Vect}((-1,1))\\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x-y=0\} \oplus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y=0\}\end{aligned}$$

et on a

$$\forall u = (x,y) \in \mathbb{R}^2, u = \underbrace{\frac{x+y}{2}v_1}_{\in \mathrm{Vect}((1,1))} + \underbrace{\frac{x-y}{2}v_2}_{\in \mathrm{Vect}((-1,1))}$$