Chapitre V - Applications linéaires

Introduction

Dans ce chapitre (on ne change pas une équipe qui gagne), $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est l'ensemble des scalaires, et E, F seront deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Dans les deux précédents chapitres, on a étudié toutes sortes d'ensembles munis d'une structure commune : celle d'espace vectoriel.

Question : Si E, F sont deux e.v., quelles sont les applications $f : E \to F$ qui "préservent" cette structure, autrement dit, envoient une somme de vecteurs de E sur la somme correspondante dans F, et de même avec la multiplication scalaire ?

Dans ce chapitre, on verra donc :

- Qui sont ces applications ?
- A quelle condition sont-elles injectives, surjectives et bijectives ?
- Que font-elles aux s.e.v ? Aux familles libres ou génératrices ?
  Aux bases de E ?

Applications linéaires

Définition 1

*Une application $f : E \to F$ est **linéaire** si :*

1. *Pour tous $(x, y) \in E^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$;*
2. *Pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$*

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires $E \to F$.

*Une application linéaire $E \to E$ est appelée un **endomorphisme** de E. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endormorphismes E.*

Proposition 2

Si $f : E \to F$ est linéaire, $\boxed{f(0_E) = 0_F}$.

Preuve :

Proposition 3 (*Une caractérisation utile*)

Soit $f : E \to F$ une application.

Alors f est linéaire <u>ssi</u> pour tous $(x, y) \in E^2$, pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \tag{1}$$

Preuve :[1]

Exemple 4

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $h_\alpha : x \in E \mapsto \alpha x \in E$ est linéaire.

$\rightsquigarrow$ *En effet, pour tous $(x, y) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ on a*

Deux cas particulier notables :

- *si $\alpha = 0$ on obtient **l'application nulle** $0_{\mathcal{L}(E)} : x \in E \mapsto 0_E$.*
  ***Exercice important :** Plus généralement, l'application $x \in E \mapsto 0_F \in F$ est linéaire. On la note $0_{\mathcal{L}(E,F)}$.*

- *si $\alpha = 1$ on obtient **l'identité** $\mathrm{Id}_E : x \in E \mapsto x \in E$.*

Exemple 5

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, alors l'application

$$\begin{aligned} \Phi_A : \mathbb{R}^p &\to \mathbb{R}^n \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

est linéaire : $\Phi_A(\lambda X + \mu Y) = A(\lambda X + \mu Y) = \lambda AX + \mu AY$.

1. *Indication :* Procéder par double implication ! Cette preuve ressemble à celle de la proposition 5 du chapitre 3, qui dit qu' "un sous-ensemble $F \subset E$ est un s.e.v. ssi $0_E \in F$ et $u + \lambda v \in F$ pour tous $u, v \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$"

Exemple 6

L'application $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x + y, z + y) \in \mathbb{R}^2$ *est linéaire :*

Exemple 7

L'application dérivation $D : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}[X]$ *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}[X]$ *:*

Exemple 8

L'application transposée $t : A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \mapsto {}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ *est linéaire :*

Exemple 9

Projection dans une somme directe

Soient E_1, E_2 *deux s.e.v. de* E *tels que* $E = E_1 \oplus E_2$. *Alors les projections*

$$\begin{aligned} p_1 : E = E_1 \oplus E_2 &\to E_1 \\ x = x_1 + x_2 &\mapsto x_1 \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} p_2 : E = E_1 \oplus E_2 &\to E_2 \\ x = x_1 + x_2 &\mapsto x_2 \end{aligned}$$

sont linéaires.

Exemple-ception : *On a vu que* $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}((1,1)) \oplus \mathrm{Vect}((1,-1))$. *Pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *on a*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x-y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que les applications suivantes sont linéaires

$$p_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} \end{pmatrix}, p_2 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{x-y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{2} \\ \frac{y-x}{2} \end{pmatrix}$$

Exemple 10

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $\mathscr{F} = (v_1, ...v_p)$ une famille de vecteurs. L'application
$(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \mapsto \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i \in E$ *est linéaire.*

Exemple-ception : *Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, prenons les vecteurs $P_1(X) = X^2, P_2(X) = X + 1$. L'application*

$$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \lambda X^2 + \mu(X + 1) \in \mathbb{R}_2[X]$$

est linéaire.

Exemple 11 **(*Contre-exemples*)**

1. *Soit $x_0 \in E$ un vecteur non nul. La translation $t : x \in E \mapsto x + x_0 \in E$ n'est pas linéaire :*

   Exemple-ception : *$t : x \in \mathbb{R} \mapsto x + 1 \in \mathbb{R}$ n'est pas linéaire.*
2. *L'application $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (xy, y^2 - x) \in \mathbb{R}^2$ n'est pas linéaire :*
3. *L'application $p : x \in \mathbb{R} \mapsto 2^x - 1 \in \mathbb{R}$ n'est pas linéaire :*

Composition d'applications linéaires

Proposition 12

Soient E, F, G 3 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $g \circ f$ est linéaire.

Preuve :

Exemple 13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a vu que $\Phi_A : X \in \mathbb{R}^n \mapsto AX \in \mathbb{R}^n$ est linéaire. D'après la proposition,

$$\Phi_A \circ \Phi_A : X \in \mathbb{R}^n \mapsto A^2 X \in \mathbb{R}^n$$

est également linéaire.
⚠ *Par contre, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas linéaire*[2]*.*

L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$

Proposition 14

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ deux applications linéaires, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $f + g : E \to F$ et $\lambda f : E \to F$ sont des applications linéaires.

Preuve :

Proposition 15

$\mathcal{L}(E,F)$ muni de l'addition interne $(f,g) \mapsto f+g$ et de la loi externe $(\lambda, f) \mapsto \lambda f$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Preuve : On sait que l'ensemble des fonctions $E \to F$ est un espace vectoriel. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{L}(E,F)$ est un s.e.v. Or

1. L'application constante égale à 0_F est linéaire ;
2. Pour tous $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$, $f+g \in \mathcal{L}(E,F)$;
3. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda f \in \mathcal{L}(E,F)$.

Donc $\mathcal{L}(E,F)$ est bien un s.e.v de l'espace des fonctions $E \to F$. □

Applications linéaires et sous-espaces vectoriels

Image directe

Proposition 16

Soit $E' \subset E$ un s.e.v. de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $f(E') = \{f(x), x \in E'\}$ est un sous-espace vectoriel de F.

Preuve :

Définition 17

*Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. L'ensemble $f(E)$ est un s.e.v. de F, appellé **image** de f et noté $\mathrm{Im}(f)$.*

Remarque 18

L'application f est surjective ssi $\mathrm{Im}(f) = F$.

Exemple 19 (*Exemple important*)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\Phi_A : X \in \mathbb{R}^p \mapsto AX \in \mathbb{R}^n$ l'application associée. Un vecteur $b = (b_1, \dots, b_n)$ est dans $\mathrm{Im}(\Phi_A)$ ssi il existe $x = (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\Phi_A(x) = b$, autrement dit

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Autrement dit, $b \in \mathrm{Im}(\Phi_A)$ ssi ce sytème admet des solutions.

Exemple 20

On va déterminer l'image de l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \mapsto (2x+y, y+z)$$

Image réciproque et noyau

⚠ Une notation confusante ⚠

Soit $f : X \to Y$ une fonction (linéaire ou non) entre deux ensembles quelconques. Soit $B \subset Y$ un sous-ensemble de l'espace d'arrivée. Alors on note $f^{-1}(B)$ le sous-ensble de X défini par

$$f^{-1}(B) = \{x \in X, f(x) \in B\}$$

⇝ Contrairement aux apparences, cela **ne suppose pas que f est bijective, et f^{-1} ici ne désigne pas la bijection réciproque de f !**

Par exemple, si $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$, alors f n'est ni injective ni surjective, donc pas bijective, mais on peut néanmoins prendre le sous ensemble $[-1,4]$ de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ et calculer

$$f^{-1}([-1,4]) = \{x \in \mathbb{R}, x^2 \in [-1,4]\} = [-2,2]$$ [a]

a. Vérifiez que cet exemple est clair !

Proposition 21

Soit F' un s.e.v. de F et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $f^{-1}(F') = \{x \in E, f(x) \in F'\}$ est un s.e.v. de E.

Preuve :

Définition 22

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. L'ensemble $f^{-1}(\{0_F\})$ est un s.e.v. de E, appelé **noyau** *de f et noté* $\mathrm{Ker}(f)$.

Proposition 23

f est injective ssi $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Preuve : On procède par double implication :

Exemple 24 (*Exemple important*)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, et $\Phi_A : X \in \mathbb{R}^p \mapsto AX \in \mathbb{R}^n$. Alors $X \in \mathrm{Ker}\,\Phi_A$ ssi X est solution du système

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textit{i.e.} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ *C'est un système* homogène, *il a donc au moins une solution $X = (0, \dots, 0)$.*

- *Si c'est la seule, alors $\mathrm{Ker}\,\Phi_A = \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ et Φ_A est injective.*
- *Sinon, il y a une infinité de solutions, qui (comme on a vu au chapitre 3 !) forment un s.e.v de $\mathbb{R}^p$.*

Exemple 25

Déterminons $\mathrm{Ker}(f)$, *où $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x+y, y+z) \in \mathbb{R}^2$:*

Isomorphismes

Définition 26

Une application linéaire bijective (c'est-à-dire à la fois injective et surjective) est appelée ***isomorphisme linéaire****.*

Deux e.v. E et F sont ***isomorphes*** *s'il existe un isomorphisme linéaire $f : E \to F$.*

Remarque 27

Rappelons qu'une application $\phi : X \to Y$ entre deux ensembles est bijective si et seulement si elle admet une application réciproque (ou inverse) $\phi^{-1} : Y \to X$ telle que $\phi \circ \phi^{-1} = \mathrm{Id}_Y$ et $\phi^{-1} \circ \phi = \mathrm{Id}_X$.

Proposition 28

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorphisme linéaire. Alors l'application réciproque $f^{-1} : F \to E$ est linéaire.

Preuve :

Exemple 29 (*Exemple important*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, *alors $\Phi_A : X \in \mathbb{R}^n \to AX \in \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme linéaire, d'inverse $(\Phi_A)^{-1} = \Phi_{A^{-1}}$. En effet,*

$$\forall Y \in \mathbb{R}^n,\ \Phi_A \circ \Phi_{A^{-1}}(Y) = \Phi_A(A^{-1}Y) = AA^{-1}Y = Y$$
$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \Phi_{A^{-1}} \circ \Phi_A(X) = \Phi_{A^{-1}}(AX) = A^{-1}AX = X$$

donc $\Phi_{A^{-1}}$ est bien l'application inverse de Φ_A.

Exemple 30

Considérons $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x + 3y, x + y) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que f est bijective en calculant f^{-1} :

Applications linéaires et familles de vecteurs

Question : L'image d'une famille libre/génératrice par une application linéaire est-elle libre/ génératrice ?

Réponse : En général, non.

Exemple 31 (***Contre-exemple***)

Par exemple, si $f : (x, y) \mapsto (x, 0) \in \mathbb{R}^2$ *alors pour*

$$\mathscr{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ on a } f(\mathscr{F}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} :$$

$\mathscr{F}$ *est libre, mais* $f(\mathscr{F})$ *est liée.*

$\leadsto$ *On peut avoir* $\mathscr{F}$ *libre mais* $f(\mathscr{F})$ *liée.*

$\mathscr{F}$ *est génératrice, mais pas* $f(\mathscr{F})$ *:* $(0, 1) \notin \mathrm{Vect}(f(\mathscr{F}))$.

$\leadsto$ *On peut avoir* $\mathscr{F}$ *génératrice mais* $f(\mathscr{F})$ *pas génératrice.*

Question : Est-ce qu'on peut quand même en dire quelque chose ?

Réponse : En utilisant la linéarité de f, on obtient que si $\mathscr{F} = (v_1, \ldots, v_p)$ est une famille de vecteurs de E, alors pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ on a

$$f(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p) = \lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_p f(v_p)$$

$\leadsto$ Voyons ce qu'on peut en tirer :

Proposition 32

Soit $\mathscr{F} = \{v_1, \ldots, v_p\}$ *une famille de vecteurs et* $f \in \mathcal{L}(E, F)$. *Alors*

1. $f(\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)) = \mathrm{Vect}(f(v_1), \ldots, f(v_p))$;
2. *Si* $\mathscr{F}$ *est génératrice, alors* $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(v_1), \ldots, f(v_p))$;
3. *Si* $\mathscr{F}$ *est liée alors* $(f(v_1), \ldots, f(v_p))$ *est liée ;*
4. *Si* $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ *est libre alors* $\mathscr{F}$ *est libre.*

Au risque d'insister...

⚠ L'image d'une famille libre peut être liée.
⚠ L'image d'une famille génératrice de E n'est pas nécessairement génératrice de F.

Exemple 33

Considérons

$$f : (x, y, z) \mapsto (2x + y, y + z) \text{ et } \mathscr{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Alors $\{f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)\} =$

est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^2$

Remarque : $\mathscr{B}$ *est une famille libre de* $\mathbb{R}^3$ *mais* $f(\mathscr{B})$ *n'est pas une famille libre de* $\mathbb{R}^2$.

Exemple 34

Considérons la projection sur $\mathrm{Vect}((1,-1))$ *parallèlement à* $\mathrm{Vect}((1,1))$

$$p_2 : (x,y) \mapsto \left(\frac{x-y}{2}, -\frac{x-y}{2}\right) \text{ et } \mathscr{B} = \{(1,0),(0,1)\}$$

Alors $\{f(1,0), f(0,1)\} =$

engendre $\operatorname{Im} f = \mathrm{Vect}(1,-1)$.

Remarque : *A nouveau,* $\mathscr{B}$ *est libre et génératrice mais* $f(\mathscr{B})$ *n'est ni libre, ni génératrice de* $\mathbb{R}^2$.

Preuve de la proposition :

$\rightsquigarrow$ Si on a plus d'informations sur f, c'est mieux :

Proposition 35

Soit $\mathscr{F} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *une famille de vecteurs et* $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. *Si* f *est injective et* $\mathscr{F}$ *est libre, alors* $f(\mathscr{F})$ *est libre.*
2. *Si* f *est surjective et* $\mathscr{F}$ *est génératrice, alors* $f(\mathscr{F})$ *est génératrice.*

On en déduit :

Corollaire 36

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ *est un isomorphisme, alors l'image par* f *d'une base de* E *est une base de* F.

En particulier, $\dim E = \dim F$.

Preuve de la proposition :

Applications linéaires en dimension finie

Supposons que E est de dimension finie et soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors chaque $x \in E$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des e_i :

$$\forall x \in E,\ \exists!(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \text{ t.q. } x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$$

Mais alors

$$f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \ldots + \lambda_n f(e_n).$$

$\rightsquigarrow$ Si on sait trouver les coordonnées de tout vecteur x dans la base $\mathscr{B}$, et si on connaît $f(e_1), \ldots, f(e_n)$, on peut en déduire $f(x)$ pour tous les vecteurs $x \in E$.

⇝ Inversement, si on choisit l'image d'une base, on peut construire une application linéaire :

Proposition 37

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Alors, pour tout p-uplet $(v_1, \dots, v_p)$ de vecteurs de F, il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que

$$\forall\, i \in \{1, ..., p\},\ \ f(e_i) = v_i$$

Preuve : Il y a deux choses à montrer : d'une part qu'il *existe* une telle application linéaire f, et d'autre part que cette application est *unique.*

- **Existence :**

- **Unicité :**

Exemple 38

Il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_p[X]$ telle que

$$\forall\, i \in \{1, ...p\},\ \ f(e_i) = (X+3)^i,$$

où $(e_1, \dots, e_p)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^p$. f est donnée par

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_p) &= f(x_1 e_1 + \dots + x_p e_p) \\ &= x_1 f(e_1) + \dots x_p f(e_p) \\ &= x_1(X+3) + x_2(X+3)^2 + \dots + x_p(X+3)^p \end{aligned}$$

On a vu que s'il existe un isomorphisme linéaire $f : E \to F$, alors $\dim E = \dim F$.

Réciproquement, la proposition précédente nous permet de montrer :

Corollaire 39

Si $\dim E = \dim F$, il existe un isomorphisme linéaire $f : E \to F$.

Preuve : Notons $n = \dim E = \dim F$. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ une base de F.

$\rightsquigarrow$ D'après la proposition précédente, il existe une unique $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f(e_i) = f_i$ pour tout i.

$\rightsquigarrow$ On va montrer que f est bijective : f sera alors un isomorphisme $E \to F$.

$\triangleright$ **Injectivité de f :** On montre que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

$\triangleright$ **Surjectivité de f :** On montre que $\mathrm{Im}(f) = F$.

Rang d'une application linéaire

Définition 40

Soient E et F deux e.v. de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **rang** *de f, noté $\mathrm{rg}(f)$, la dimension du s.e.v. $\mathrm{Im}(f) \subset F$.*

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f)}$$

Exemple 41

1. *Considérons à nouveau*
$$f : \mathbb{R}^3 \in (x, y, z) \mapsto (2x + y, y + z) \in \mathbb{R}^2$$
On a vu que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$, *donc* $\mathrm{rg}(f) = \boxed{}$.

2. *Soit* $f : x \in E \mapsto 0_F \in F$ *l'application nulle. Alors* $\mathrm{rg}(f) = \dim(\{0_F\}) = \boxed{}$.

3. *Soit* $p_2 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}) \in \mathbb{R}^2$ *la projection sur* $\mathrm{Vect}((1, 1))$. *Alors* $\mathrm{rg}(f) = \boxed{}$.

Théorème du rang

Théorème 42

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, *alors* $\boxed{\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}(f)}$.

Preuve :

Plan de bataille :

Posons $n = \dim E$ et $p = \dim \mathrm{Ker}(f)$. On va montrer que $\mathrm{rg}(f) = n - p$.

Pour cela, on prend une base $\{u_1, \ldots, u_p\}$ de $\mathrm{Ker}(f)$. C'est, en particulier, une famille libre de E, donc, par le théorème de la base incomplète, on peut lui adjoindre $n - p$ vecteurs $v_{p+1}, \ldots, v_n$ de E tels que $(u_1, \ldots, u_p, v_{p+1}, \ldots, v_n)$ est une base de E.

On va montrer que $\mathscr{B} = \{f(v_{p+1}), \ldots, f(v_n)\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

▸ $\mathscr{B}$ **engendre** $\mathrm{Im}(f)$ **:**

▸ $\mathscr{B}$ **est une famille libre :**

Corollaire 43 (*Rang et injectivité/surjectivité*)

1. *f est injective ssi* $\mathrm{rg}(f) = \dim E$
2. *f est surjective ssi* $\mathrm{rg}(f) = \dim F$

Preuve : [3]

Remarque 44

On retrouve donc le fait que si $f : E \to F$ est un isomorphisme, alors on doit avoir $\dim E = \dim F$.

Proposition 45

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que E et F sont de dimension finie et que $\boxed{\dim E = \dim F}$.
Alors les assertions suivantes sont équivalentes :
1. f est injective, 2. f est surjective 3. f est bijective

3. Le 1. est une conséquence du théorème du ragng ; le 2. vient en fait simplement de la définition du rang et du fait que si $G \subset F$ est un s.e.v de F, alors $G = F$ ssi $\dim G = \dim F$.

Remarque 46

Ceci s'applique en particulier aux endomorphismes $f : E \to E$, du moment que E est de dimension finie.

Preuve de la proposition :

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Supposons que f est injective, alors $\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim(\{0_E\}) = 0$ donc, par le théorème du rang,

$$\dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{rg}(f) = \dim E = \dim F$$

donc $\mathrm{Im}(f) = F$, et par conséquent f est surjective.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Supposons que f est surjective. Alors $\mathrm{rg}(f) = \dim F = \dim E$, donc par le théorème du rang,

$$\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim E - \mathrm{rg}(f) = 0$$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, et f est aussi injective. Elle est donc bijective.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ Vrai par définition de la bijectivité. □

Exemple 47

Considérons l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x - y) \end{aligned}$$

⇝ *Pour montrer que f est un isomorphisme, il suffit de montrer que f est injective, et pour ça, il suffit de montrer que* $\mathrm{Ker}(f) = \{(0, 0)\}$. *Allons-y :*

⚠ Cette proposition n'est pas vraie en dimension infinie !

Exemple 48 (*Contre-exemple*)

Considérons $D : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}[X]$. *Alors*

- $\mathrm{Im}(D) = \mathbb{R}[X]$ *donc D est surjective*
- $\mathrm{Ker}(D) = \mathrm{Vect}(1) \neq \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ *donc D n'est pas injective.*