Chapitre VI - Représentation matricielle des applications linéaires

Introduction

Dans ce chapitre, devinez quoi, on va noter $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ l'ensemble des scalaires, et E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels **de dimension finie** sur $\mathbb{K}$. On notera $\dim E = p$ et $\dim F = n$.

Dans les précédents chapitres, on a vu que dans un e.v. E de dimension finie n, il existe toutes des bases, qui sont toutes de cardinal n.

Si on choisit une base $\mathscr{B}$ de E, chaque vecteur de E peut être représenté par un unique n-uplet de coordonnées scalaires : les coordonnées du vecteur *dans la base $\mathscr{B}$*.

Dans ce chapitre, à l'aide de cette idée, on verra :

- Comment représenter un vecteur de E par une matrice-colonne ;
- Comment représenter une application linéaire $E \to F$ par une matrice ;
- En quoi ça aide ?

Des bases aux matrices

Vecteurs et matrices-colonnes : On fixe pour la suite :

$$\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p) \text{ une base de } E, \ \mathscr{B}' = (f_1, \dots, f_n) \text{ une base de } F$$

$\rightsquigarrow$ Pour chaque $x \in E$, il existe donc un unique p-uplet $(x_1 \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $x = x_1 e_1 + \dots + x_p e_p$. On peut donc lui associer un vecteur-colonne, que l'on notera

$$[x]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$$

$\rightsquigarrow$ De même, pour $y \in F$, il existe un unique $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $y = y_1 f_1 + \dots + y_n f_n$. On associe à y le vecteur-colonne

$$[y]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

Exemple 1

Considérons dans $\mathbb{R}^3$ la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$.
Alors, le vecteur $u = (1, 2, \sqrt{\pi}) \in \mathbb{R}^3$ se décompose dans la base $\mathscr{B}_0$ en

$$u = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + \sqrt{\pi} \cdot e_3$$

donc on lui associe le vecteur colonne

$$[u]_{\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \sqrt{\pi} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

et plus généralement, à chaque $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on associe

$$[u]_{\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

...Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique, il faut reconnaître que ce n'est pas très impressionnant !

Exemple 2 (*Moins trivial*)

- *Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}_{\mathbb{R}_2[X]} = (1, X, X^2)$.*

  Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $P = aX^2 + bX + c$.

  $\rightsquigarrow$*Les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}_{\mathbb{R}_2[X]}$ sont (c, b, a) : on lui associe la matrice-colonne*

  $$[P]_{\mathscr{B}_{\mathbb{R}_2[X]}} = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

  Ainsi, si $P_1 = X^2 - 1$, $P_2 = 1 + X$ et $P_3 = X^2 + X + 1$

  $$[P_1]_{\mathscr{B}_{\mathbb{R}_2[X]}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, [P_2]_{\mathscr{B}_{\mathbb{R}_2[X]}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}, [P_3]_{\mathscr{B}_{\mathbb{R}_2[X]}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \tag{1}$$

- *Considérons, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suties réelles, le sous espace vectoriel*

  $$F = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

  Alors on peut montrer[1] *que $((-1)^n)_n, (2^n)_n \in F$ et que toute suite $(u_n)_n \in F$ est combinaison linéaire de ces deux-là :*

  $$(u_n)_n \in F \iff \exists\, a, b \in \mathbb{R} \ t.q. \ u_n = a(-1)^n + b2^n$$

  $\rightsquigarrow$ *Les suites $v_n = ((-1)^n)_n$ et $w_n = (2^n)_n$ forment une famille génératrice de F, et puisqu'elles ne sont pas colinéaires, c'est une famille libre. Donc $((v_n)_n, (w_n)_n)$ est une base de F.*

  Dans la base $\mathscr{B}_F = ((v_n)_n, (w_n)_n)$ de F, les coordonnées de $(u_n)_n$ sont (a, b) : on lui associe la matrice colonne

  $$[(u_n)_n]_{\mathscr{B}_F} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$$

Avantage : *On peut facilement traduire les problèmes d'algèbre linéaire en systèmes.*

Exemple 3 (*Application*)

> *Montrons que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, où*
>
> $$P_1 = X^2 - 1, P_2 = 1 + X, P_3 = X^2 + X + 1$$
>
> *Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. En utilisant (1), ceci se réécrit :*

Matrice d'une application linéaire

On a vu au chapitre 5 qu'à toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on peut associer une application linéaire

$$\begin{aligned} \Phi_A : \mathbb{K}^p &\to \mathbb{K}^n \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ On va voir que réciproquement, à toute application linéaire entre espaces vectoriels **de dimension finie**, on peut associer une matrice.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Rappelons qu'on a fixé

$$\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p) \text{ une base de } E,\ \mathscr{B}' = (f_1, \ldots, f_n) \text{ une base de } F$$

On a vu au chapitre 5 que si on connaît $f(e_1), \ldots, f(e_p)$, on peut en déduire $f(x)$ pour tout x.

Or, pour $j \in \{1, ..., p\}$, $f(e_j) \in F$, donc il existe des scalaires $a_{1,j}, \ldots, a_{n,j}$ tels que

$$f(e_j) = a_{1,j} f_1 + \ldots + a_{n,j} f_n$$

En somme :

- Pour connaître $f(x)$ pour tout x, il suffit de connaître $f(e_1), \ldots, f(e_p)$;
- Pour connaître $f(e_j)$, il suffit de connaître ses coordonnées $(a_{1,j}, \ldots, a_{n,j})$ dans la base $\mathscr{B}'$

$\rightsquigarrow$ Donc pour "connaître" f, il suffit de connaître $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$.

Ca a une tête de matrice !

$\rightsquigarrow$ On en déduit la définition suivante :

Définition 4

La **matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$** *est la matrice $(a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j-ième colonne est donnée par les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}'$. On la note :*

$$[f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ \\ f_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} [f(e_1)]_{\mathscr{B}'} & \dots & [f(e_p)]_{\mathscr{B}'} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme, on choisit généralement la même base $\mathscr{B}$ sur E au départ et à l'arrivée.
$\rightsquigarrow$ *On note alors la matrice de f dans cette base $[f]_{\mathscr{B}}$.*

Remarque 5

- *La matrice de f est de taille $\dim F \times \dim E$.*
- ⚠ *La matrice de f dépend des bases choisies sur E et F : si on les change, on n'obtient pas les mêmes coefficients.*

Exemple 6

Considérons $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x + y, y + z) \in \mathbb{R}^2$.

1. *On considère les bases canoniques $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ sur $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}_0' = (f_1, f_2)$ sur $\mathbb{R}^2$:*

$$\mathscr{B}_0 = \left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \ \mathscr{B}_0' = \left(f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Alors on a :

$$\begin{cases} f(e_1) = \boxed{\qquad\qquad\qquad} = \boxed{\quad\ } \cdot f_1 + \boxed{\quad\ } \cdot f_2 \\ f(e_2) = \boxed{\qquad\qquad\qquad} = \boxed{\quad\ } \cdot f_1 + \boxed{\quad\ } \cdot f_2 \\ f(e_3) = \boxed{\qquad\qquad\qquad} = \boxed{\quad\ } \cdot f_1 + \boxed{\quad\ } \cdot f_2 \end{cases}$$

Donc la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_0$ et $\mathscr{B}_0'$ est

$$[f]_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_0'} = \begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad \\ \\ \end{pmatrix}$$

2. *On considère maintenant les bases $\mathscr{B}_1 = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ sur $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}_1' = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ sur $\mathbb{R}^2$ données par :*

$$\mathscr{B}_1 = \left(\tilde{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \ \mathscr{B}_1' = \left(\tilde{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Alors

$$\begin{cases} f(\tilde{e}_1) = \boxed{} = \boxed{} \cdot \tilde{f}_1 + \boxed{} \cdot \tilde{f}_2 \\ f(\tilde{e}_2) = \boxed{} = \boxed{} \cdot \tilde{f}_1 + \boxed{} \cdot \tilde{f}_2 \\ f(\tilde{e}_3) = \boxed{} = \boxed{} \cdot \tilde{f}_1 + \boxed{} \cdot \tilde{f}_2 \end{cases}$$

Donc la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}'_1$ est

$$[f]_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}'_1} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

Entraînement 7

3. *Calculons $[f]_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}'_1}$:*

$$\begin{cases} f(e_1) = \boxed{} = \boxed{} \cdot \tilde{f}_1 + \boxed{} \cdot \tilde{f}_2 \\ f(e_2) = \boxed{} = \boxed{} \cdot \tilde{f}_1 + \boxed{} \cdot \tilde{f}_2 \\ f(e_3) = \boxed{} = \boxed{} \cdot \tilde{f}_1 + \boxed{} \cdot \tilde{f}_2 \end{cases}$$

Donc la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_0$ et $\mathscr{B}'_1$ est

$$[f]_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}'_1} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

4. *Calculons $[f]_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}'_0}$:*

$$\begin{cases} f(\tilde{e}_1) = \boxed{} = \boxed{} \cdot f_1 + \boxed{} \cdot f_2 \\ f(\tilde{e}_2) = \boxed{} = \boxed{} \cdot f_1 + \boxed{} \cdot f_2 \\ f(\tilde{e}_3) = \boxed{} = \boxed{} \cdot f_1 + \boxed{} \cdot f_2 \end{cases}$$

Donc la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}'_0$ est

$$[f]_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}'_0} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

Exemple 8

1. *Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, alors on a vu que $\mathscr{B}_0 = (1, X, X^2)$ est une base de E. On considère l'application de dérivation :*

$$D : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}_2[X]$$

Alors

$$\begin{cases} D(1) = \boxed{} = \boxed{} \cdot 1 + \boxed{} \cdot X + \boxed{} \cdot X^2 \\ D(X) = \boxed{} = \boxed{} \cdot 1 + \boxed{} \cdot X + \boxed{} \cdot X^2 \\ D(X^2) = \boxed{} = \boxed{} \cdot 1 + \boxed{} \cdot X + \boxed{} \cdot X^2 \end{cases}$$

Donc la matrice de l'endomorphisme[2] *D dans la base $\mathscr{B}_0$ est*

$$[D]_{\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

2. *Condidérons cette fois la base $\mathscr{B}_1 = (P_1, P_2, P_3)$, où*

$$P_1 = X^2 - 1, P_2 = 1 + X, P_3 = X^2 + X + 1$$

Alors

$$\begin{cases} D(P_1) = \boxed{} = \boxed{} \cdot P_1 + \boxed{} \cdot P_2 + \boxed{} \cdot P_3 \\ D(P_2) = \boxed{} = \boxed{} \cdot P_1 + \boxed{} \cdot P_2 + \boxed{} \cdot P_3 \\ D(P_3) = \boxed{} = \boxed{} \cdot P_1 + \boxed{} \cdot P_2 + \boxed{} \cdot P_3 \end{cases}$$

Donc la matrice de D dans la base $\mathscr{B}_1$ est

$$[D]_{\mathscr{B}_1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Matrice de l'application Id_E **:** Considérons l'application identité $\mathrm{Id}_E : x \in E \mapsto x \in E$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ n'importe quelle base de E. Alors

$$\mathrm{Id}_E(e_j) = e_j = 0 \cdot e_1 + \ldots + 1 \cdot e_j + \ldots + 0 \cdot e_p$$

donc

$$[\mathrm{Id}_E(e_j)]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j \quad \text{et } [\mathrm{Id}_E]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & \ldots & 1 \end{pmatrix} = I_p$$

Opérations sur les matrices

Proposition 9 (*Image d'un vecteur par une application linéaire*)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathscr{B},\mathscr{B}'$ des bases de E et F respectivement. Pour $x \in E$, $y \in F$, on note

$$A = [f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'},\ X = [x]_{\mathscr{B}},\ Y = [y]_{\mathscr{B}'}$$

$$\text{Alors } \boxed{y = f(x) \iff Y = AX}$$

Preuve :

Exemple 10

Soient $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x+y, y+z) \in \mathbb{R}^2$ et $u = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$. On a vu que dans les bases canoniques $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}_0'$ de $\mathbb{R}^2$,

$$[f]_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_0'} = \begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \end{pmatrix},\ [u]_{\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Alors $f(u) = (3,2)$ et on a bien

$$[f]_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_0'}[u]_{\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \qquad \\ \\ \end{pmatrix} = [f(u)]_{\mathscr{B}_0'}.$$

...A nouveau, dans $\mathbb{R}^n$ muni de la base canonique, ce n'est pas très impressionnant.

Exemple 11 (*Application : noyau d'une application linéaire*)

Reprenons l'application de dérivation dans $\mathbb{R}_2[X]$, notée D. Pour tout $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(D) &\iff D(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ &\iff [D(P)]_{\mathscr{B}_0} = 0_{3,1} \\ &\iff [D]_{\mathscr{B}_0}[P]_{\mathscr{B}_0} = 0_{3,1} \end{aligned}$$

Or on a vu que

$$[D]_{\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}, [P]_{\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(D) &\iff \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. \\ &\iff a = b = 0 \iff P = c \end{aligned}$$

Donc le noyau de D est l'ensemble des polynômes constants (bon, on s'en doutait !)

Entraînement 12

On a vu que la matrice de D dans la base $\mathscr{B}_1 = (P_1, P_2, P_3)$ est

$$[D]_{\mathscr{B}_1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Soit $P(X) = 2X^2 + 3X + 2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors, d'une part

$$D(P) = P'(X) = \qquad\qquad = \boxed{} \cdot P_1 + \boxed{} \cdot P_2 + \boxed{} \cdot P_3$$

et d'autre part

$$[D(P)]_{\mathscr{B}_1} = [D]_{\mathscr{B}_1}[P]_{\mathscr{B}_1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ *Est-ce cohérent ?*

Proposition 13 (*Opérations sur les matrices*)

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On se donne une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{B}'$ de F. Alors :

- $[f+g]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = [f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} + [g]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$
- $[\lambda f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \lambda [f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$

Preuve : [3]

Corollaire 14

L'application $\mathcal{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} : f \in \mathcal{L}(E,F) \mapsto [f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme linéaire.

Preuve :

- Montrons que $\mathcal{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ une application linéaire :

- Montrons que $\mathcal{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est injective :

3. *Indications :* Il s'agit donc de trouver les coordonnées d'une part de $(f+g)(e_1), ..., (f+g)(e_p)$ et d'autre part de $(\lambda f)(e_1), \ldots, (\lambda f)(e_p)$ dans la base $\mathscr{B}'$.

▸ Montrons que $\mathcal{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est surjective :

⇝ $\mathcal{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est une application linéaire bijective, donc c'est un isomorphisme. □

Remarque 15

En particulier, $\dim \mathcal{L}(E,F) = np$.
(Pourquoi, au fait ?)

Théorème 16 (*Produit matriciel et composée*)

Soit G un troisième e.v. Soient $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{B}'$ une base de F, $\mathscr{B}''$ une base de G. Soients $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors

$$[g \circ f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} = [g]_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''} \cdot [f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}.$$

Preuve : On note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$, $\mathscr{B}' = (f_1, \dots, f_n)$, $\mathscr{B}'' = (g_1, \dots, g_q)$ et

$$A = [f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}, \quad B = [g]_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q1} & \dots & b_{qn} \end{pmatrix}, \quad C = [g \circ f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} = (c_{ij})$$

⇝ On veut montrer que pour tous $1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq p$,

$$c_{ij} = (BA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$$

Calculons la j-ème colonne de C our trouver c_{ij}. On a d'une part

$$g \circ f(e_j) = \_\_\_\_\_\_ \; g_1 + \dots + \_\_\_\_\_\_ \; g_q$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} g \circ f(e_j) = g(f(e_j)) &= g(\_\_\_\_\_\_ \; f_1 + \dots + \_\_\_\_\_\_ \; f_n) \\ &= \_\_\_\_\_\_ \; g(f_1) + \dots + \_\_\_\_\_\_ \; g(f_n) \\ &= \_\_\_\_\_\_ \; (\_\_\_\_\_\_ \; g_1 + \dots + \_\_\_\_\_\_ \; g_q) + \dots + \_\_\_\_\_\_ \; (\_\_\_\_\_\_ \; g_1 + \dots + \_\_\_\_\_\_ \; g_q) \\ &= (\_\_\_\_\_\_ \; + \dots + \_\_\_\_\_\_ \;)g_1 + \dots + (\_\_\_\_\_\_ \; + \dots + \_\_\_\_\_\_ \;)g_q \end{aligned}$$

Par unicité des coordonnées de $g \circ f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}''$, on a donc, pour $i \in \{1, ..., q\}$ et $j \in \{1, ..., p\}$,

$$c_{ij} = \boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

$\square$

Corollaire 17

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. On note

$$f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}} \in \mathcal{L}(E)$$

Soit $A = [f]_{\mathscr{B}}$, alors

$$[f^k]_{\mathscr{B}} = A^k$$

Exemple 18

Soient

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x + y, y + z) \in \mathbb{R}^2, \quad g : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (a + b, a - b) \in \mathbb{R}^2$$

Dans les bases canoniques $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}'_0$ de $\mathbb{R}^2$,

$$[f]_{\mathscr{B}_0, \mathscr{B}'_0} = \begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \end{pmatrix}, \quad [g]_{\mathscr{B}'_0} = \begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad \\ \\ \end{pmatrix}$$

On a, d'une part, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$g \circ f(x, y, z) = g(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_) = (\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)$$

donc

$$[g \circ f]_{\mathscr{B}_0, \mathscr{B}'_0} = \begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \end{pmatrix}$$

Et, d'autre part,

$$[f]_{\mathscr{B}_0, \mathscr{B}'_0}[g]_{\mathscr{B}'_0} = \begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \end{pmatrix}$$

Proposition 19 (***Matrice d'un isomorphisme***)

Supposons que $\dim E = \dim F$. Soient $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ des bases de E et F respectivement. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = [f]_{\mathscr{B}, \mathscr{B}'} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

1. *f est un isomorphisme ssi A est inversible.*
2. *Si f est un isomorphisme, alors $[f^{-1}]_{\mathscr{B}', \mathscr{B}} = A^{-1} = [f]^{-1}_{\mathscr{B}, \mathscr{B}'}$.*

Preuve : Pour 1., on procède par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que f est bijective. Alors $f^{-1}: F \to E$ existe et est linéaire. Notons $B = [f^{-1}]_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$. Alors : donc A est inversible, d'inverse $B = [f^{-1}]_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$ (ce qui, dans la foulée, prouve 2.)

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $A = [f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible. Notons $B = A^{-1}$.

On a vu plus haut que l'application

$$\mathcal{M}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} : g \in \mathcal{L}(F,E) \mapsto [g]_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

est ___________. Il existe donc $g : F \to E$ linéaire telle que ___________.
Montrons que $g = f^{-1}$. On a

$$[g \circ f]_{\mathscr{B}} =$$

donc, par injectivité de l'application $\mathcal{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}$, on a ___________

On obtient de même $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. On en déduit que f est bijective : c'est donc un isomorphisme, et

$$[f^{-1}]_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = [g]_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = A^{-1}.$$

$\square$

Changement de base

On a vu que les coordonnées d'un vecteur x dans une base $\mathscr{B}$, que l'on a notées $[x]_{\mathscr{B}}$, ainsi que la matrice $[f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ d'une application linéaire f, dépendent des bases considérées $\mathscr{B}$ sur E et $\mathscr{B}'$ sur F.

Question : Si l'on choisit des bases différentes $\mathscr{B}_1$ sur E et $\mathscr{B}_1'$ sur F, peut-on déterminer $[x]_{\mathscr{B}_1}$ à partir de $[x]_{\mathscr{B}}$ et $[f]_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_1'}$ à partir de $[f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$?

Revenons dans $\mathbb{R}^3$ et prenons une base non canonique, par exemple

$$\mathscr{B}_1 = \big(e_1' = (1,1,0), e_2' = (1,0,1), e_3' = (0,1,1)\big)$$

On a vu que le vecteur $u = (1, 2, \sqrt{\pi})$ est associé, via la base canonique, à la matrice colonne

$$[u]_{\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \sqrt{\pi} \end{pmatrix}$$

Cependant, la matrice colonne correspondant à u dans la base $\mathscr{B}_1$ ne sera pas la même !

$\rightsquigarrow$ Y a-t-il un procédé qui permette de déduire directement $[u]_{\mathscr{B}_1}$ du vecteur colonne $[u]_{\mathscr{B}_0}$?

Définition 20 (*Matrice de passage*)

Soient $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_p), \mathscr{B}_1 = (e'_1, \dots, e'_p)$ *deux bases de* E*. On appelle* **matrice de passage de** $\mathscr{B}_0$ **vers** $\mathscr{B}_1$*, notée* $P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_1}$*, la matrice de* $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ *dont la* j*-ème colonne est donnée par les coordoonnées de* e'_j *dans la base* $\mathscr{B}_0$*.*

Proposition 21

$P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_1}$ *est la matrice de* $\mathrm{Id}_E : E \to E$ *dans les bases* $\mathscr{B}_1$ *au départ et* $\mathscr{B}_0$ *à l'arrivée :*

$$P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_1} = [\mathrm{Id}_E]_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_0}$$

Preuve : Par définition de la représentation matricielle, la j-ième colonne de $[\mathrm{Id}_E]_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_0}$ est donnée par :

ce qui correspond à la j-ième colonne de $P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_1}$.

Exemple 22

Dans $\mathbb{R}^2$*, on considère la base canonique* $\mathscr{B}'_0 = (f_1, f_2)$ *et la base*

$$\mathscr{B}'_1 = \left(f'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Alors

$$P_{\mathscr{B}'_0,\mathscr{B}'_1} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$

D'autre part,

$$\begin{cases} f_1 = \boxed{} \cdot f'_1 + \boxed{} \cdot f'_2 \\ f_2 = \boxed{} \cdot f'_1 + \boxed{} \cdot f'_2 \end{cases} \quad \text{donc } [f_1]_{\mathscr{B}'_1} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}, \ [f_2]_{\mathscr{B}'_1} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

et

$$P_{\mathscr{B}'_1,\mathscr{B}'_0} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$

Exemple 23

Considérons dans $\mathbb{R}^3$ *la base canonique* $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ *et la base* $\mathscr{B}_1$ *donnée par*

$$\mathscr{B}_1 = \left(e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Alors

$$\begin{cases} e_1' = \boxed{}\, e_1 + \boxed{}\, e_2 + \boxed{}\, e_3 \\ e_2' = \boxed{}\, e_1 + \boxed{}\, e_2 + \boxed{}\, e_3 \\ e_3' = \boxed{}\, e_1 + \boxed{}\, e_2 + \boxed{}\, e_3 \end{cases} \text{ donc } P_{\mathscr{B}_0, \mathscr{B}_1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Réciproquement, on a

$$\begin{cases} e_1 = \boxed{}\, e_1' + \boxed{}\, e_2' - \boxed{}\, e_3' \\ e_2 = \boxed{}\, e_1' - \boxed{}\, e_2' + \boxed{}\, e_3' \\ e_3 = \boxed{}\, e_1' + \boxed{}\, e_2' + \boxed{}\, e_3' \end{cases} \text{ donc } P_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Proposition 24

Soient $\mathscr{B}_0, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ *trois bases sur* E*. Alors*

- $P_{\mathscr{B}_0, \mathscr{B}_1}$ *est inversible, et* $P_{\mathscr{B}_0, \mathscr{B}_1}^{-1} = P_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_0}$
- $P_{\mathscr{B}_0, \mathscr{B}_2} = P_{\mathscr{B}_0, \mathscr{B}_1} \cdot P_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2}$

Preuve :

Proposition 25 (*Changement de base pour les vecteurs*)

Soient $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_p)$, $\mathscr{B}_1 = (e'_1, \dots e'_p)$ *deux bases de* E. *Soit* $x \in E$, *alors il existe des coordonnées* $x_1, \dots, x_p$ *et* $x'_1, \dots, x'_p$ *telles que* $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j = \sum_{j=1}^{p} x'_j e'_j$. *On note*

$$X = [x]_{\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix},\ X' = [x]_{\mathscr{B}_1} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix}$$

Alors

$$\boxed{X = P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_1} X'}.$$

Preuve :

Exemple 26

Reprenons notre exemple du début : considérons la base

$$\mathscr{B}_1 = \big(e'_1 = (1,1,0), e'_2 = (1,0,1), e'_3 = (0,1,1)\big)$$

et le vecteur $u = (1, 2, \sqrt{\pi})$. *Alors*

$$P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \text{ et } [u]_{\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

donc on a

$$[u]_{\mathscr{B}_1} = P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_0}[u]_{\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

et on vérifie bien que

$$u = \frac{3-\sqrt{\pi}}{2} f_1 + \frac{\sqrt{\pi}-1}{2} f_2 + \frac{\sqrt{\pi}+1}{2} f_3$$

Proposition 27 (*Changement de base pour les applications linéaires*)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathscr{B}_0, \mathscr{B}_1$ *deux bases de* E, $\mathscr{B}'_0, \mathscr{B}'_1$ *deux bases de* F. *On note*

$$A = [f]_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}'_0},\ B = [f]_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}'_1},\ P = P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_1},\ Q = P_{\mathscr{B}'_0,\mathscr{B}'_1}$$

Alors on a

$$\boxed{B = Q^{-1}AP},\quad \text{i.e. } [f]_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}'_1} = P_{\mathscr{B}'_1,\mathscr{B}'_0}[f]_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}'_0}P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_1}$$

Preuve : On écrit $f : (E,\mathscr{B}_1) \to (F,\mathscr{B}'_1)$ comme la composée

$$(E,\mathscr{B}_1) \xrightarrow[\mathrm{Id}_E]{} (E,\mathscr{B}_0) \xrightarrow[f]{} (F,\mathscr{B}'_0) \xrightarrow[\mathrm{Id}_F]{} (F,\mathscr{B}'_1,)$$

ce qui, en matrices, donne

Exemple 28

On a vu que la matrice de l'application $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x+y, y+z) \in \mathbb{R}^2$ *est*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ dans les base canoniques } \mathscr{B}_0 \text{ et } \mathscr{B}'_0$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ dans les bases } \mathscr{B}_1 \text{ et } \mathscr{B}'_1$$

On a aussi calculé

$$P = P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ Q^{-1} = P_{\mathscr{B}'_1,\mathscr{B}'_0} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie bien

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B$$

Corollaire 29

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ *un endormorphisme,* $\mathscr{B}_0, \mathscr{B}_1$ *deux bases de* E.
On note $A = [f]_{\mathscr{B}_0},\ B = [f]_{\mathscr{B}_1},\ P = P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_1}$ *Alors*

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

Définition 30 (*Matrices semblables*)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices carrées. On dit que B est **semblable** *à A s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$.*

Proposition 31

Deux matrices sont semblables si, et seulement si, elles représentent le même endormorphisme dans deux bases différentes.