Chapitre VII - Déterminant d'une matrice

Introduction

On notera, comme toujours, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On a vu que les matrices permettent de représenter

- les applications linéaires
- les systèmes linéaires
- (on va le voir) les familles de vecteurs.

Le déterminant d'une matrice *carrée* A est un réel associé à A qui suffit à déterminer si A est inversible, ce qui nous permettra de dire, en un seul calcul

- si une application linéaire est bijective
- si un système admet une unique solution
- si une famille de vecteurs est une base.

Déterminants de petites matrices

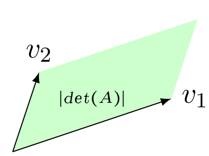
Définition 1 (*Déterminant d'une matrice 2×2*)

Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. *Son déterminant est défini par*

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Interprétation géométrique 2

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $|\det(A)|$ *est l'aire du parallélogramme délimité par les vecteurs* $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ *et* $v_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ *:*



En particulier, $\det(A) = 0$ *ssi les vecteurs* v_1 *et* v_2 *sont colinéaires.*

Entraînement 3

- $\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{}$
- $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{}$
- $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{}$

Définition 4 (*Déterminant d'une matrice 3×3*)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Alors son déterminant est défini par

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} \\ &\quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}\end{aligned}$$

Moyen mnémotechnique :

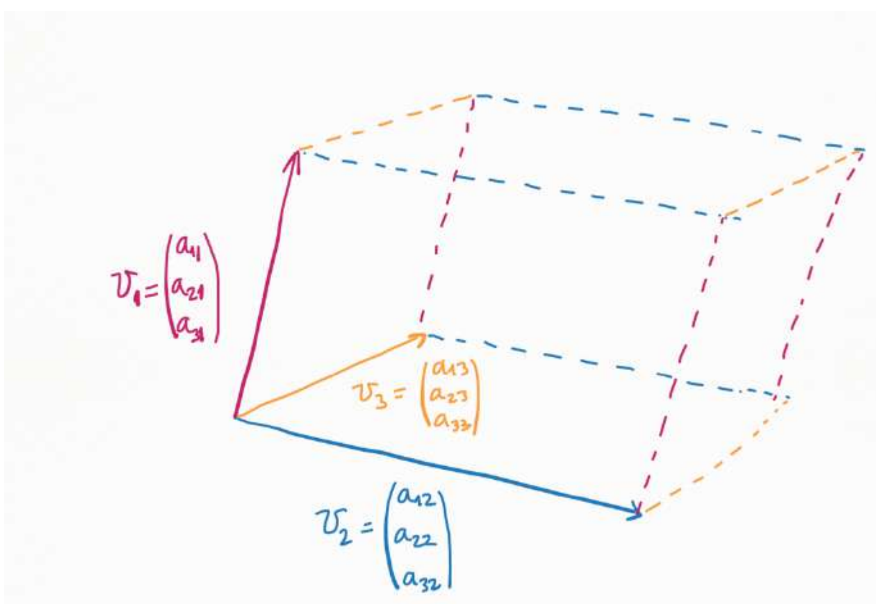
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Interprétation géométrique 5

Notons v_1, v_2, v_3 les vecteurs colonnes de A :

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

Alors $|\det(A)|$ est le volume du parallélépipède délimité par v_1, v_2 et v_3 :



En particulier, $\det(A) = 0$ ssi ce parallélépipède est plat, autrement dit ssi $\dim \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) \leq 2$, autrement dit, ssi ces vecteurs sont liés.

Exemple 6

- $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$

- $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$

Déterminant - cas général

Définition 7

On définit l'application déterminant $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *par récurrence sur* n *comme suit :*

- *Pour* $n = 1$, $A = (a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ *et on pose* $\det(A) = a$.
- *Pour* $n > 1$, *pour* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, *on note* $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ *la matrice obtenue en supprimant la* i*-ème ligne et la* j*-ème colonne de* A. *De là, on définit*

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} \det A_{1k}$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \hline \vdots & & & \\ \vdots & & A_{11} & \\ \vdots & & & \end{array}\right)$$

Exemple 8

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \boxed{} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$+ (-1)^{1+2} \cdot \boxed{} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot \boxed{} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+4} \cdot \boxed{} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Petites dimensions

Vérifions que cette formule nous redonne le “bon” résultat pour les matrices 2×2 et 3×3.

- Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors

$$\det(A) = a\det(d) - b\det(c) = ad - bc$$

  $\rightsquigarrow$ On retrouve donc bien la définition donnée plus tôt pour les déterminants 2×2.

- **Exercice :** Montrons que la formule de récurrence redonne bien notre formule des déterminants 3×3 :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\boxed{}\begin{vmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\boxed{}\begin{vmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\boxed{}\begin{vmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ \end{vmatrix}$$

$$=$$

Propriétés du déterminant

Définition 9

Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On note $\det(v_1, \dots, v_n)$ le déterminant de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la j-ième colonne est v_j.

Proposition 10 (*Propriétés fondamentales*)

1. $\det(I_n) = 1$
2. $\det(v_1, \dots, v_k + v'_k, \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_k, \dots, v_n) + \det(v_1, \dots, v'_k, \dots, v_n)$
   et $\det(v_1, \dots, \lambda v_k, \dots, v_n) = \lambda \det(v_1, \dots, v_k, \dots, v_n)$.
3. *S'il existe $i \neq j$ tels que $v_i = v_j$ alors* $\det(v_1, \dots, v_n) = 0$.

Preuve : On procède par récurrence sur n, où la matrice est de taille $n \times n$ et on montre 1., 2. et 3. simultanément :

$\boxed{n = 1}$

1. $\det(I_1) = \det(1) = 1$ ✓
2. $\det((a) + (a')) = a + a' = \det(a) + \det(a')$
   et $\det(\lambda a) = \lambda a = \lambda \det(a)$ ✓
3. Ne s'applique pas pour $n = 1$ (on ne peut pas avoir $i \neq j$) donc ben....✓

$\boxed{n=2}$ [1]

1. $\det I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1*1-0*0 = 1$ ✓

2. $\begin{vmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{vmatrix} = (a+a')d - b(c+c') = (ad-bc)+(a'd-bc') = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix}$

   et $\begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{vmatrix} = (\lambda a)d - b(\lambda c) = \lambda(ad-bc) = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ✓

3. $\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = ac - ac = 0$ ✓

$\boxed{n=3}$ [2] A chaque fois, les accolades sous l'équation viennent de l'hypothèse de récurrence.

1. $\det I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=\det I_2 = 1} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$ ✓

2. $$\begin{vmatrix} a_1+a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2+a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3+a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1+a_1') \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_2+a_2' & c_2 \\ a_3+a_2' & c_3 \end{vmatrix}}_{= \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2' & c_2 \\ a_3' & c_3 \end{vmatrix}} + c_1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_2+a_2' & b_2 \\ a_3+a_2' & b_3 \end{vmatrix}}_{= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2' & b_2 \\ a_3' & b_3 \end{vmatrix}}$$

   $$= \left(a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right) + \left(a_1' \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2' & c_2 \\ a_3' & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2' & b_2 \\ a_3' & b_3 \end{vmatrix} \right)$$

   $$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

   et $$\begin{vmatrix} \lambda a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_2 & b_2 & c_2 \\ \lambda a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (\lambda a_1) \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda a_2 & c_2 \\ \lambda a_3 + a_2' & c_3 \end{vmatrix}}_{=\lambda \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}} + c_1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda a_2 & b_2 \\ \lambda a_3 + a_2' & b_3 \end{vmatrix}}_{=\lambda \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \checkmark$$

3. On le fait pour le cas $v_1 = v_2$, je vous laisse vérifier les autres !

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \underbrace{\begin{vmatrix} a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 \end{vmatrix}}_{=0} = 0 \checkmark$$

$\boxed{n \rightsquigarrow n+1}$ C'est technique et on est fatigués...on va l'admettre. Voir annexe.

1. Ce n'est pas nécessaire à la peuve, mais c'est plus éclairant que le cas $n=1$!
2. Ce n'est pas non plus nécessaire à la preuve, mais ça permet de voir comment la récurrence va marcher.

Remarque 11

- *La propriété 2. dit que l'application*

$$v \in \mathbb{K}^n \mapsto \det(v_1, \ldots, v, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}$$

est linéaire.

$\rightsquigarrow$ *On dit que le déterminant est* multilinéaire.

(Une application $f : E \times \ldots \times E \to F$ est dite multilinéaire si, pour tout i,

$$v \in E \mapsto f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1} \ldots, v_n) \in F$$

est linéaire.)

$\rightsquigarrow$ *En particulier, si une des colonnes de A est nulle, alors* $\det(A) = 0$.

- *Les applications multilinéaires qui vérifient 3. sont dites* alternées.

- *On peut montrer que* $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *est la seule application qui vérifie ces trois propriétés. C'est parfois comme cela qu'on le définit : c'est l'unique application multilinéaire alternée* $\mathbb{K}^n \times \cdot .. \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ *telle que* $\det(e_1, \ldots, e_n) = 1$ *où* $(e_1, ..., e_n)$ *est la base canonique de* $\mathbb{K}^n$.

Exemple 12

Utiliser ces règles et les exemples qu'on a déjà faits pour calculer

- $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{}$ [3]

- $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \boxed{}$

- $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \boxed{}$

Proposition 13

> *Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Si on échange deux colonnes v_k et v_l, le déterminant $\det(v_1, \dots, v_n)$ change de signe.*

Preuve : Calculons

$$\det(v_1, \dots, \underbrace{v_k + v_l}_{k\text{-ième colonne}}, \dots, \underbrace{v_k + v_l}_{l\text{-ième colonne}}, \dots, v_n)$$

Puisque cette matrice a deux colonnes égales (à $v_k + v_l$), on a

$$\begin{aligned}
0 &= \det(v_1, \dots, v_k + v_l, \dots, v_k + v_l, \dots, v_n) \\
&= \underbrace{\det(v_1, \dots, v_k, \dots, v_k, \dots, v_n)}_{=0} + \det(v_1, \dots, v_k, \dots, v_l, \dots, v_n) \\
&\quad + \det(v_1, \dots, v_l, \dots, v_k, \dots, v_n) + \underbrace{\det(v_1, \dots, v_l, \dots, v_l, \dots, v_n)}_{=0}
\end{aligned}$$

d'où $\det(v_1, \dots, v_k, \dots, v_l, \dots, v_n) = -\det(v_1, \dots, v_l, \dots, v_k, \dots, v_n)$. □

Exemple 14

> *Utiliser ces règles et les exemples qu'on a déjà faits pour calculer*
>
> - $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$
>
> - $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$
>
> - $\begin{vmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$

Déterminants et bases

Proposition 15

> *Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Alors $\det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$ ssi $(v_1, \dots, v_n)$ est une base.*

Preuve : On procède par double implication :

$\boxed{\Leftarrow}$ On va montrer que si $(v_1, ..., v_n)$ est une base, alors $\det(v_1, ..., v_n) \neq 0$.

$\rightsquigarrow$ Supposons que $(v_1, \dots, v_n)$ est une base. On va procéder par l'absurde : supposons que

$$\det(v_1, \dots, v_n) = 0.$$

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Puisque $(v_1, \dots, v_n)$ est une base, pour chaque $j \in \{1, ...n\}$, il existe des scalaires $(a_{1j}, \dots, a_{nj})$ tels que

$$e_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$$

Mais alors :

- D'une part, $\det(e_1, \dots, e_n) = \det(I_n) = \boxed{}$;
- D'autre part,

$$\det(e_1, \dots, e_n) =$$

En utilisant successivement la linéarité par rapport à chaque colonne, on obtient que $\det(e_1, \dots, e_n)$ est une somme de termes du type

donc $\det(e_1, \dots, e_n) = 0$.

$\rightsquigarrow$ 1=0!! Contradiction.

$\boxed{\Rightarrow}$ On procède par contraposée : on montre que si $(v_1, ..., v_n)$ n'est pas une base alors $\det(v_1, ..., v_n) = 0$.

Supposons donc que $(v_1, \dots, v_n)$ n'est pas une base. C'est donc une famille liée : En effet,

$\rightsquigarrow$ L'un des v_k, disons v_n, est donc combinaison linéaire des autres : il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ tels que

En utilisant la linéarité du déterminant par rapport à la dernière colonne, on en déduit

$$\det(v_1, \dots, v_n) =$$

Or chacun des termes est un déterminant dont deux colonnes sont égales, donc vaut $\boxed{}$. On a donc bien $\det(v_1, \dots, v_n) = 0$. □

Déterminants et matrices inversibles

Corollaire 16

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$.

Preuve : On procède, sans grande surprise, par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$

$\boxed{\Leftarrow}$

Déterminant d'un produit

Théorème 17

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\boxed{\det(AB) = \det(A)\det(B)}$

Preuve : Ce résultat technique est admis : voir complément.

Corollaire 18

Si A est inversible, $\boxed{\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}}$.

Preuve :

Déterminant d'un endomorphisme

Une application de ce dernier résultat est le suivant : *deux matrices semblables ont le même déterminant.* En effet, si $B = P^{-1}AP$, on a

$$\det(B) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \frac{1}{\det(P)}\det(A)\det(P) = \det(A)$$

En particulier, si E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E, alors

$$\det([f]_{\mathscr{B}}) = \det([f]_{\mathscr{B}'})$$

On peut donc définir

Définition 19

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E de dimension finie. On définit le déterminant de f par

$$\det(f) = \det([f]_{\mathscr{B}})$$

pour une base $\mathscr{B}$ quelconque de E.

Calculs de déterminants

Proposition 20 (*Déterminant de la transposée*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\boxed{\det({}^tA) = \det(A)}$.

Ainsi, les propriétés qu'on a vu sur les *colonnes* de A, via la transposée, s'appliquent aussi aux *lignes* de A. En particulier :

- det est linéaire par rapport à chaque ligne de A
- $\det A \neq 0$ ssi les lignes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$
- Le déterminant change de signe si on échange deux lignes.

Définition 21

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note A_{ij} la matrice obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de A. On appelle **cofacteur** *de A par rapport au coefficient a_{ij} le nombre*

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

Théorème 22 (*Développement par rapport à une ligne ou une colonne*)

- *Développement par rapport à la i-ème ligne :*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$$

- *Développement par rapport à la j-ème colonne :*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$$

Plan de la preuve

Rappelons qu'on a défini le déterminant par la formule de développement par rapport à la première ligne.

▸ Pour démontrer la formule de développement par rapport à la i-ème ligne, on va utiliser le fait que permuter deux lignes change le signe du déterminant.

⇝ En effet, du coup, si on permute la i-ème ligne "vers le haut" de proche en proche, jusqu'à ce qu'elle soit tout en haut de A, on change le signe du déterminant à chaque fois.

⇝ Autrement dit, au bout de $i-1$ permutations, on obtient une nouvelle matrice $\tilde{A}$ dont la première ligne est la i-ème ligne de A et toutes les suivantes sont dans le même ordre que A. Et cette matrice vérifie

$$\det(A) = (-1)^{i-1}\det(\tilde{A})$$

⇝ On calcule $\det(\tilde{A})$ en développant par rapport à la 1ère ligne pour avoir le résultat.

▸ La formule sur les colonnes s'en déduit en appliquant celle qu'on vient de démontrer à ${}^tA$.

Exemple 23

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

⇝ *Par rapport à quelle ligne/colonne développer pour minimiser l'effort ?*

Opérations élémentaires

D'après les propriétés du déterminant, on peut effectuer des opérations sur les colonnes C_j et les lignes L_i de A , ce qui modifie le déterminant comme suit.

Proposition 24

Si on obtient $\tilde{A}$ à partir de A par :

- $L_i \leftrightarrow L_j$, *ou* $C_i \leftrightarrow C_j$ *alors* $\det\tilde{A} = -\det A$
- $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$, *ou* $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$ *alors* $\det\tilde{A} = \det A$
- $L_i \leftarrow \alpha L_i$, *ou* $C_i \leftarrow \alpha C_i$ *alors* $\det\tilde{A} = \alpha\det A$

Stratégie : on utilise les opérations sur les lignes et les colonnes (notamment la deuxième) pour faire apparaître le plus de zéros possibles sur une ligne ou une colonne donnée, et on développe par rapport à celle-ci.

Exemple 25

Reprenons $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Matrices triangulaires

Proposition 26

Le déterminant d'une matrice triangulaire (ou diagonale) est le produit des coefficients diagonaux.

Preuve :

Applications

Définition 27

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. On note* C_{ij} *ses cofacteurs. Alors la matrice* $Com(A) = (C_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est appelée la* comatrice de A

Proposition 28 (*Inverse d'une matrice via la comatrice*)

Si A *est une matrice inversible, alors*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t Com(A)}$$

Preuve

Montrons que $A^t\mathrm{Com}(A) = \det(A)I_n$ (que A soit inversible ou non). Le (i,j)-ième coefficient de $A^t\mathrm{Com}(A)$ est donné par $\sum_{k=1}^n a_{ik}C_{jk}$.

• Si $i = j$, cela donne

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{ik} =$$

• Si $i \neq j$, appelons A' la matrice obtenue à partir de A en remplaçant L_j par L_i.

⇝ Alors A' a deux lignes identiques, donc $\det(A') = \boxed{}$.

On note C'_{kl} ses cofacteurs, alors on a pour tout k, $C'_{jk} = C_{jk}$ et on a :

donc si $i \neq j$ le (i,j)-ième coefficient de $A^t\mathrm{Com}(A)$ est $\boxed{}$.

⇝ On a donc bien $A^t\mathrm{Com}(A) = \det(A)I_n$. □

Exemple 29

- *On suppose que* $ad - bc \neq 0$. *Alors si* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *on a*

  $A^{-1} =$

- *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  Alors

  $\det(A) =$

  Com$(A) =$

  donc A *est inversible et par la proposition précédente,* $A^{-1} =$

Méthode de Cramer

Considérons le système linéaire

$$(\star)\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \iff AX = B$$

Pour $j \in \{1, ..., n\}$, on note A_j la matrice obtenue en remplaçant la j-ième colonne de A par le vecteur-colonne B :

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème 30

Si $\det(A) \neq 0$, *le système* $(\star)$ *admet une unique solution* $X = (x_1, \ldots, x_n)$ *donnée par*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \ldots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

Preuve :

Exemple 31

Considérons le système

$$(\star)\begin{cases} 3x - 4y = 6 \\ 5x - 3y = -1 \end{cases}$$

Alors

$$A = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}, \det(A) = \boxed{}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}, \det(A_1) = \boxed{}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}, \det(A_2) = \boxed{}$$

donc la solution de $(\star)$ *est*

$$\begin{cases} x = \boxed{} \\ y = \boxed{} \end{cases}$$