

TD1 : SYSTÈMES LINÉAIRES

Méthode du pivot de Gauss

Exercice 1 Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ 2x + 4y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + 3z = -2 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ x + 4y - z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + 3z = a \\ x + z = b \\ x + 4y - z = c \end{cases}$$

Exercice 2 Résoudre les systèmes suivant :

$$\begin{cases} 3x + \quad + 2z = 0 \\ \quad 3y + z + 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y - z = 11 \\ 2x + 5y - 5z = 13 \\ x + 4y + z = 18 \end{cases}$$

Systemes à paramètres

Exercice 3 Donner, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble des solutions des systèmes suivants :

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x - \alpha y = \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha x + (1 - \alpha)y = \alpha \\ \alpha x + \quad \alpha y = \alpha \end{cases}$$

Exercice 4 Résoudre suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + \alpha y = -3 \\ \alpha x + 4y = 6 \end{cases}$$

Quelle interprétation géométrique du résultat faites-vous ?

Exercice 5 Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ le système d'équations suivant admet-il une solution unique ? Aucune solution ? Une infinité de solution ?

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + \alpha z = 3 \\ x + \alpha y + 3z = 2 \end{cases}$$

Exercices complémentaires

Exercice 6 Déterminer tous les polynômes de degré 2, $P = ax^2 + bx + c$, tels que

1. $P(-1) = 5, P(1) = 1$ et $P(2) = 2$
2. $P(-1) = 4$ et $P(2) = 1$

Exercice 7 Trouver un polynôme de degré 3 tel que

$$P(X + 1) - P(X) = X^2$$

En déduire que

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 8 Résoudre le système non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} x^3 y^2 z^6 & = 1 \\ x^4 y^5 z^{12} & = 2 \\ x^2 y^2 z^5 & = 3 \end{cases}$$

Exercice 9 Représenter les sous-ensembles de \mathbb{R}^2 suivants :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y < 1\} \\ A_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x + y| < 1\} \\ A_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| + |y| < 1\} \\ A_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y > -1\} \\ A_5 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - y| < 1\} \\ A_6 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\} \end{aligned}$$