

TD2 : MATRICES

Vrai ou faux ?

1. Soient A et B deux matrices carrées telles que $A + B = AB$. Alors A et B commutent.
2. Soient D_1 et D_2 deux matrices diagonales. Alors D_1 et D_2 commutent.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée, et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale. Alors A et D commutent.
4. Soit A une matrice inversible. Alors $A^2 \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.
5. Il existe des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$.

Indication : Utiliser la trace.

Opérations sur les matrices

Exercice 1 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 5 \\ 9 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix},$$
$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -5 & 2 & 9 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Effectuer toutes les sommes et produits possibles avec ces matrices.

Puissances de matrices carrées

Exercice 2 On considère la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer J^2 et J^3 et en déduire J^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n .

Indication : On pourra écrire A comme somme de deux matrices qui commutent et utiliser la formule démontrée à l'exercice 9.

Exercice 3 On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer P^{-1} .
2. Calculer $D = P^{-1}AP$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
3. *Application* : On considère les suites données par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2v_n \end{cases}$$

Calculer u_n et v_n en fonction de n .

Inverses de matrices

Exercice 4 Calculer, par la méthode de Gauss, l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 Pour $\alpha \neq 0$, calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -2 \\ 1 & \alpha + 1 & \alpha - 2 \\ 2 & 2\alpha + 1 & 2\alpha - 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^3 = I_3 + 3A$. En déduire que A est inversible et trouver A^{-1} .

Exercice 7 On considère la matrice

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A^t A$ et $A A^t$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1} .

Remarque : Les matrices inversibles dont l'inverse est égale à la transposée sont dites *orthogonales*.

Exercice 8 Mettre les systèmes suivants sous forme matricielle :

$$\begin{cases} x & - & z = 3 \\ 2x & + & y - 3z = 1 \\ -x & & + 2z = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x & + & z = -1 \\ 2x & - & y + z = 2 \\ -x & + & y - z = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x & + & y - z = a \\ 2x & & + z = b \\ 2x & + & y - z = c \end{cases}$$

En déduire leur ensemble de solutions.

Indication : Voir exercice 4

Exercices complémentaires

Exercice 9 (★) On considère deux matrices A et B de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et on suppose que $AB = BA$. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Exercice 10 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $B = A - I_3$. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'expression de A^n .

Indication : S'inspirer de l'exercice 2

Exercice 11 (★) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
2. Pour $n \geq 2$, trouver le reste $R_n(X)$ de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
Indication : $R_n(X)$ est un polynôme de degré 1 : $R_n(X) = a_n X + b_n$. Il s'agit donc de déterminer, pour chaque $n \geq 2$, les réels a_n et b_n . Utiliser pour cela les racines de $X^2 - 3X + 2$.
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_2$.

Exercice 12 On considère la matrice

$$B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A^t A$ et ${}^t A A$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1} .

Indication : Voir exercice 7.

Exercice 13 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Mettre le système suivant sous forme matricielle :

$$(S_\alpha) \begin{cases} x + \alpha y - 2z = 1 \\ x + (\alpha + 1)y + (\alpha - 2)z = 2 \\ 2x + (2\alpha - 1)y + (2\alpha - 4)z = 3 \end{cases}$$

Pour $\alpha \neq 0$, en déduire l'ensemble des solutions de (S_α) .

Indication : Voir exercice 5.