Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L1 MIASHS 2021-2022
Algèbre linéaire 1

TD3 : Espaces et sous-espaces vectoriels

Vrai ou faux ?

- L'ensemble $\mathbb{Q}$ est un espace vectoriel.
- L'ensemble des solutions d'un système linéaire à n inconnues et p équations est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si, et seulement si, le système est homogène.
- $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou bien $G \subset F$.
- Soit $A \subset E$ un sous-ensemble d'un espace vectoriel E. Alors $\text{Vect}(A) = \text{Vect}(\text{Vect}(A))$.

Espaces vectoriels

Exercice 1 Soit $E = \mathbb{R}_+^*$ muni de la loi de composition interne définie par

$$\forall a, b \in E, \quad a \oplus b = ab$$

et de la loi de composition externe définie par

$$\forall a \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \otimes a = a^\lambda.$$

Montrer que $(E, \oplus, \otimes)$ est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel.

Exercice 2 Sur $E = \mathbb{R}^2$ on définit les deux lois suivantes :

$$\forall (x, y), (x', y') \in E, \quad (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$
$$\forall (x, y) \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \star (x, y) = (\lambda x, 0).$$

Est-ce que $(\mathbb{R}^2, +, \star)$ est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel ?

Sous-espaces vectoriels

Pour les exercices 3 à 8, trouver des exemples d'éléments appartenant à chaque ensemble.

Exercice 3 Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$
- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$

Exercice 4 Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq y\}$
- $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz > 0\}$
- $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z\}$
- $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 3z = 0\}$

Exercice 5 Parmi les sous-ensembles de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels :

- les matrices symétriques
- les matrices inversibles
- les matrices triangulaires
- les matrices triangulaires supérieures
- les matrices qui commutent avec une matrice donnée A
- les matrices M telle que $M^2 = M$
- les matrices de trace nulle.

Exercice 6 ($\star$) On considère $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de E ?

- $A = \Big\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ bornée}\Big\}$
- $B = \Big\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ monotone}\Big\}$
- $C = \Big\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ convergente}\Big\}$
- $D = \Big\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ nulle à partir d'un certain rang}\Big\}$
- $D = \Big\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ constante à partir d'un certain rang}\Big\}$

Exercice 7 ($\star$) Soit E l'espace vectoriel de toutes les fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de E ?

- $A = \{f \in E, 2f(0) = f(1)\}$
- $B = \{f \in E, f(1) = f(0) + 1\}$
- $C = \{f \in E, f \geq 0\}$
- $D = \Big\{f \in E, \forall x \in [0, \frac{1}{2}],\ f(x) = 0\Big\}$
- $H = \{f \in E, f \text{ est à valeurs dans } \{0,1\}\}$

Exercice 8 ($\star$) Parmi les sous-ensembles $\mathbb{R}[X]$ suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels :

- les polynômes de degré exactement 4
- les polynômes de degré inférieur ou égal à 4
- les multiples de $(X - 4)$
- les polynômes comportant seulement des monômes de degré pair
- les polynômes à coefficients positifs ou nuls

Exercice 9 Soit α un réel. On considère le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}^3$:

$$F_\alpha = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = \alpha\Big\}.$$

Montrer que F_α est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\alpha = 0$.

Exercice 10 Soient $F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\big\}$ et $G = \big\{(a-b, a+b, a-3b), a, b \in \mathbb{R}\big\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $F \cap G$.

Sous-espace vectoriel engendré

Exercice 11 Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $u = (1,1,1)$, $v = (1,0,-1)$, $u' = (2,1,0)$ et $v' = (0,1,2)$.

1. Justifier que
$$\mathrm{Vect}(u', v') = \{(2\alpha, \alpha+\beta, 2\beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$
2. Montrer que $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(u', v')$.

Exercice 12 On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$: $u = (1,2,3,4)$, $v = (1,-2,3,-4)$. Donner une équation de $\mathrm{Vect}(u, v)$.

Exercice 13 Dans $\mathbb{R}_2[X]$, posons

$$P(X) = 1 - X + X^2, Q(X) = 2 + X - 3X^2, R(X) = 1 - 4X + 6X^2.$$

Est-ce que $R \in \mathrm{Vect}(P, Q)$?

Somme et somme directe de sous-espaces vectoriels

Exercice 14 Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

1. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}, G = \{(\alpha, \beta, 0),\ \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$
2. $F = \{(2\alpha+\beta, \alpha+2\beta, \alpha+\beta),\ \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}, G = \{(\alpha+\beta, \alpha+\beta, 2\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$

Exercice 15 On considère dans $\mathbb{R}^n$, le vecteur $e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ et le sous-ensemble

$$H = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}$$

Montrer que H et $\mathrm{Vect}(e)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 16 ($\star$)

Montrer que le s.e.v. $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(1) = 0\}$ et le s.e.v. G des fonctions constantes sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercices complémentaires

Exercice 17 ($\star$) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On définit, sur le produit cartésien $E \times E$:

- une loi de composition interne $+$ donnée par

$$\forall (x,y), (x',y') \in E \times E, \quad (x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$$

- une multiplication externe donnée par

$$\forall z = a + ib \in \mathbb{C}, \forall (x,y) \in E \times E, \quad z \star (x,y) = (ax - by, ay + bx).$$

Montrer que $(E \times E, +, \star)$ est un $\mathbb{C}$ - espace vectoriel.

Exercice 18 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A et B deux sous-ensembles de E. Montrer que :

- Si $A \subset B$ alors $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$
- $\mathrm{Vect}(A) \cup \mathrm{Vect}(B) \subset \mathrm{Vect}(A \cup B)$
- $\mathrm{Vect}(A \cap B) \subset \mathrm{Vect}(A) \cap \mathrm{Vect}(B)$

Exercice 19 ($\star$) On considère E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont indéfiniment dérivables. On considère les sous-ensembles de E suivants :

$$F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$$
$$G = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b\}$$
$$H = \mathrm{Vect}(\sin, \cos).$$

1. Montrer que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que F et H sont supplémentaires.
3. Montrer que F et G sont supplémentaires.
4. A-t-on $G = H$? Que peut on conclure ?

Exercice 20 ($\star$) On considère $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère

- ▷ $F = \{f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)\}$ le sous-ensemble des fonctions paires,
- ▷ $G = \{f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)\}$ le sous-ensemble des fonctions impaires.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires.