Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L1 MIASHS 2021-2022
Algèbre linéaire 1

TD4 : Familles libres et génératrices, bases

Questions de cours

- Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille p vecteurs. Que peut-on dire de cette famille si $p > n$? Et si $p < n$?
- Soit E un e.v. de dimension n et $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Donner les coordonnées de $u = e_1 + e_2 + ... + e_n$ dans la base $\mathcal{B}$.

Familles libres et génératrices dans un e.v.

Exercice 1 On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et $u_1 = (0, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, 1)$ et $u_4 = (1, 2, 1)$. Les familles suivantes sont-elles libres ? Génératrices ?

$$\{u_1, u_2, u_3, u_4\}, \qquad \{u_3, 2u_3 - u_4, u_4\},$$
$$\{u_1, u_2, u_3\}, \qquad \{u_1, u_4\}$$

Exercice 2 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et (e_1, e_2, e_3, e_4) une famille libre. Les familles suivantes sont-elles libres ?

$$\{e_1, 2e_2, e_3\}, \qquad \{2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1\},$$
$$\{e_1, 2e_1 + e_4, e_4\}, \qquad \{3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3\}$$

Exercice 3 A quelle condition sur les paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ les familles de vecteurs suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

- $(1, 1, 1), (0, a, 1)$ et $(0, 0, b)$.
- $(a, a, b), (a, b, a)$ et (b, a, a).

Base d'un sous-espace vectoriel

Exercice 4 Dans $E = \mathbb{R}^3$ on considère les sous espaces vectoriels

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \text{ et } G = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$$

où $u_1 = (1, -1, 2)$, $u_2 = (1, 1, -1)$ et $u_3 = (4, 2, -1)$.

1. Donner une base de F.
2. Donner une base de G.
3. Donner une base de $F \cap G$.

Exercice 5 Pour chacun des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ ci-dessous, donner une base et déterminer un supplémentaire.

- $F_1 = \mathrm{Vect}(u, v)$ où $u = (1, 1, 0)$ et $v = (2, 1, 1)$.
- $F_2 = \mathrm{Vect}(u, v, w)$ où $u = (-1, 1, 0), v = (2, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 1)$.
- $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + 3z = 0\}$.

Indication : Utiliser le théorème de la base incomplète.

Exercices complémentaires

Exercice 6 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Soit

$$F = \left\{ P \in E \mid X^2 P'' - 2P = 0 \right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Déterminer une base de F.
3. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

Exercice 7 ($\star$) Soient a_1, a_2, a_3 trois réels distincts deux à deux. On définit les polynômes suivant dans $\mathbb{R}^2[X]$:

$$\phi_1(X) = \frac{(X-a_2)(X-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)},\ \phi_2(X) = \frac{(X-a_1)(X-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)},\ \phi_3(X) = \frac{(X-a_1)(X-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$$

1. Calculer $\phi_i(a_j)$ pour $i, j \in [\![1, 3]\!]$.
2. Montrer que la famille (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est génératrice. Pourquoi est-ce une base de $\mathbb{R}^2[X]$?
3. Calculer les coordonnées de $1, X$ et X^2 dans cette base.

Exercice 8 ($\star$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a, b deux réels distincts. tel que $a \neq b$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left((X-a)^k\right)_{0 \le k \le 2n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer les coordonnées de $(X-b)^n$ dans la base $\mathcal{B}$.
   Indication : $(X-b)^n = ((X-a)+(a-b))^n$.

Exercice 9 ($\star$) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\{x \mapsto \sin(kx),\ k = 1, \ldots, n\}$ est libre.

Exercice 10 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec $n \geq 2$. Soit F l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1) = P'(1) = 0$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $P \in F$ si et seulement si $(X-1)^2$ divise P.
3. Donner une base de F et déterminer sa dimension.

Exercice 11 ($\star$) On considère E le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des suites réelles. Soit

$$F = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - 2u_{n-1}$.
3. Exprimer pour tout $n \geq 1$, v_n en fonction de n, u_0 et u_1.
4. En déduire qu'il existe deux suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de F telles que
   $$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F, \quad \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha a_n + \beta b_n.$$
5. Montrer que $\{(a_n)_n, (b_n)_n\}$ est une famille libre.
6. En déduire la dimension de F.