Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L1 MIASHS 2021-2022
Algèbre linéaire 1

TD5 : Applications linéaires

Vrai ou faux ?

Soit E_1, E_2, E_3 trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

- Soit $f \in L(E_1)$. Alors $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E_1)} \iff f = 0_{\mathcal{L}(E_1)}$.
- Soient $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2), g \in \mathcal{L}(E_2, E_3)$. Alors $g \circ f = 0 \iff \operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(g)$.
- Soit $f : E_1 \to E_2$. Supposons que $\dim E_1 < \dim E_2$. Alors f ne peut pas être surjective.

Applications linéaires : exemples

Exercice 1 Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x - y, x + y)$
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x - y, x^2 - y^2)$
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (y, x, 0)$
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (y, x, 1)$
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x + y + 2z$
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + |y|$
- $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ définie par $f(P) = P'(0)$.

Pour celles qui sont linéaires :

- Donner une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.En déduire $\operatorname{rg} f$.
- Déterminer si f est injective, surjective ou bijective.

Exercice 2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$\begin{aligned} f_\alpha : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) &\mapsto (3x + y + z, x + y, -4x + 4y - z, 6x + 4y + \alpha z) \end{aligned}$$

1. Déterminer, suivant les valeurs de α, le noyau de f_α.
2. En déduire, dans chaque cas, le rang de f_α.
3. Donner, suivant les valeurs de α, une base de $\operatorname{Im} f_\alpha$.

Exercice 3 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f \circ f = \operatorname{Id}_E$. On dit que f est une *symétrie* de E.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et $\operatorname{Im} f = E$.
2. Montrer que $F = \{x \in E \mid f(x) = x\} = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$ et $G = \{x \in E \mid f(x) = -x\} = \operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.
3. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (z, -y, x)$.
   (a) Montrer que f est une symétrie de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$ et une base de $\operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id}_E)$.

Exercice 4 1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. On définit :

$$p_F : E = F \oplus G \to E \qquad\qquad p_G : E = F \oplus G \to E$$
$$u = v + w \mapsto v \qquad\qquad u = v + w \mapsto w$$

On dit que p_F est la projection sur F parallèlement à G et p_G est la projection sur G parallèlement à F

   (a) Montrer que $\operatorname{Ker} p_F = G$, $\operatorname{Im} p_F = F$.
   (b) Montrer que $p_F \circ p_F = p_F$.
   (c) Montrer que $p_G = \operatorname{Id} - p_F$.

2. Réciproquement, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f \circ f = f$ et $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$.
   (a) Montrer que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$.
   (b) Montrer que f est la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$.
   (c) Soit $g = \operatorname{Id}_E - f$. Déterminer $\operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Ker} g$.
3. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (z, y, z)$.
   (a) Calculer $f \circ f$.
   (b) Trouver une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.
   (c) Trouver deux sous-espaces supplémentaires F et G tels que f soit la projection sur F parallèlement à G.

Exercices théoriques

Exercice 5 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f : E \to E$ un endomorphisme. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel.

1. Montrer que $f^{-1}(f(F)) = F + \operatorname{Ker} f$.
2. Montrer que $f(f^{-1}(F)) = F \cap \operatorname{Im} f$.

Exercice 6 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'alors, pour tout $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$, la famille

$$\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$$

est une base de E.

Exercice 7 On considère E un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{rg}(f^2) = \operatorname{rg}(f)$.

1. Montrer que $\operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker}(f)$.
2. Prouver que $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = E$.

Exercices complémentaires

Exercice 8 Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $f \circ g = \operatorname{Id}_F$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} g = \{0_F\}$ et $\operatorname{Im} f = F$.
2. Montrer que $g \circ f$ est une projection de E.
3. Montrer que $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$.
4. Montrer que $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f$.
5. Dans quel cas peut on dire que f est inversible ?

Exercice 9 Soit $n \geq 2$, on pose

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\to \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto f(P) = P(1)X + P(0)(X^2 - 4). \end{aligned}$$

Montrer que f est linéaire et trouver les dimensions de $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 10 Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soient deux applications ϕ et ψ de E dans E définies par $\phi(P) = P'$ et $\psi(P) = XP$, pour tout $P \in E$.

1. Montrer que ϕ et ψ sont des endomorphismes de E.
2. Les applications ϕ et ψ sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

Exercice 11 On considère l'application trace

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} : M_n(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ A = (a_{ij}) &\mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \end{aligned}$$

Déterminer les dimensions de $\operatorname{Im} \operatorname{Tr}$ et $\operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$. Pour $n = 2$, donner une base de $\operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$.

Exercice 12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$. On note H le sous-espace vectoriel de E donné par

$$H = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in E \mid x_1 + \ldots + x_n = 0\}.$$

On note $u = (1, 1, \ldots, 1)$ et $D = \operatorname{Vect}\{u\}$. On rappelle que $E = H \oplus D$.

1. Soit $x \in E$. Donner la décomposition de x dans $H \oplus D$.
2. Donner la projection p sur H parallèlement à D et la projection q sur D parallèlement à H.

Exercice 13 Soit E un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de dimension finie. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda x.$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda \operatorname{Id}$. On dit que f est une *homothétie*.