Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L1 MIASHS 2021-2022
Algèbre linéaire 1

TD6 : Représentation matricielle des applications linéaires

Représentations matricielles : exemples

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + y, 3x - 2y)$.

1. Donner la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $v = (3, -4) \in \mathbb{R}^2$. Donner les coordonnées de $f(v)$ dans la base canonique.
3. On considère la famille $\mathcal{B}_1 = ((3, 2), (2, 2))$. Justifier que c'est une base, et donner la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_1$.
4. En déduire les coordonnées de v et $f(v)$ dans $\mathcal{B}_1$.
5. Donner la matrice de f dans $\mathcal{B}_1$.

Exercice 2 On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x, y, z) = (2y - z, 3x, 2z + x + y)$$

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3).
2. Donner la matrice de f dans la base (e_1, e_3, e_2).
3. Donner la matrice de f dans la base (e_2, e_3, e_1).

Exercice 3 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base du noyau et une base de l'image de l'application linéaire associée f_A.

Exercice 4 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2. Que peut on déduire pour f ?
2. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et une base de $\operatorname{Ker} f$. Montrer que la réunion $\mathcal{B}'$ de ces deux bases est une base de E.
3. Quelle est la matrice de f dans $\mathcal{B}'$?

Exercice 5 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ représenté dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ avec $u = (1, 0, 1)$, $v = (-1, 1, 0)$ et $w = (1, 1, 1)$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base.
2. Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}'$.
3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice de f^n dans $\mathcal{B}$.

Matrices de passage et changement de base

Exercice 6 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et soit $\mathcal{B} = (u, v, w)$ une base de E. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1 = v + w, e_2 = w + u, e_3 = u + v)$ est encore une base de E. Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Exercice 7 Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y - x \\ x - z \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner la matrice de f dans la base suivante de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Donner la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. Donner la matrice de f dans la base canonique.

Exercice 8 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ la famille définie par $u = e_1 + e_2 - e_3$, $v = e_1 - e_3$ et $w = e_1 - e_2$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E et donner la matrice M de f dans $\mathcal{B}'$.
2. Exprimer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer P^{-1}.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercices complémentaires

Exercice 9 Justifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$f(1,0,0) = (0,1),\ f(1,1,0) = (1,0) \text{ et } f(1,1,1) = (1,1).$$

Donner une expression de $f(x, y, z)$ et déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 10 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ et montrer qu'ils sont sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$. Soit $\mathcal{B}'$ la réunion de ces deux bases. Ecrire la matrice de f dans $\mathcal{B}'$.
3. Déterminer $f \circ f$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 11 Soit E un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Indication : Voir l'exercice 6 du TD5.

Exercice 12 On considère, dans $M_n(\mathbb{R})$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

1. Donner l'expression de l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
2. En déduire A^p pour $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 13 On considère $\mathbb{R}^3[X]$ muni de la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$.

1. Donner la matrice de l'endomorphisme $d : P \mapsto P'$ dans la base $\mathcal{B}$.
2. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'application

$$\begin{aligned} T_a : \mathbb{R}^3[X] &\to \mathbb{R}^3[X] \\ P &\mapsto P(X+a) \end{aligned}$$

   est linéaire. Donner la matrice M_a de T_a dans la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer $T_a \circ T_b$. En déduire $M_a M_b$.
4. Montrer de deux manières différentes que $d \circ T_a = T_a \circ d$.

Exercice 14 On considère l'application linéaire $L : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$L(aX^2 + bX + c) = \begin{pmatrix} 3a + 2b + c \\ 3a + b + 2c \end{pmatrix}$$

1. Donner la matrice de L dans les bases canoniques $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}_1 = ((1,0), (0,1))$ de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\mathcal{B}_0' = (1+X, X+X^2, 1+X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_0'$.
3. Montrer que $\mathcal{B}_1' = ((1,2), (2,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}_1'$ à $\mathcal{B}_1$.
4. Donner la matrice de L dans les bases $\mathcal{B}_0'$ et $\mathcal{B}_1'$.