Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L1 MIASHS 2021-2022
Algèbre linéaire 1

TD7 : Déterminants

Calcul de déterminants

Exercice 1 Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -11 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Pour a, b, c dans $\mathbb{R}$, cacluler le déterminant de

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 3 Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

On appelle ce déterminant le *déterminant de Vandermonde.*

Application des déterminants

Exercice 4 Les familles suivantes sont-elles libres ?

- $u = (1, 2, 3), v = (4, 5, 6), w = (2, 1, 0)$
- $u = (1, 1, -1), v = (1, 2, 0), w = (-1, 3, 2)$

Exercice 5 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que $\det(A - \lambda \,\mathrm{Id}) = (4 - \lambda)(1 - \lambda)(2 - \lambda)$.
2. Justifier qu'il existe trois vecteurs v_1, v_2 et v_3 non nuls tels que $f(v_1) = 4v_1$, $f(v_2) = 2v_2$ et $f(v_3) = v_3$. Trouver de tels vecteurs.

3. Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E et donner la matrice de f dans $\mathcal{B}'$.

Exercice 6 Soient a, b, c, d quatre réels tels que a, b, c sont deux à deux distincts. En utilisant la formule de Cramer, résoudre

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$

Exercices complémentaires

Exercice 7 On considère le déterminant

$$D_n = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer, par des opérations sur les lignes et colonnes, que $D_n = D_{n-2}$.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$.

Exercice 8 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Montrer que s'il existe un endormorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\operatorname{Id}$, alors f est de dimension paire.

Exercice 9 On considère $E = M_2(\mathbb{R})$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de E et $\mathcal{B}$ la base canonique de E :

$$\mathcal{B} = \left(E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

1. Montrer que l'application $f_A : E \to E$ définie par $f_A(M) = AM$ est linéaire.
2. Donner la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$.
3. Calculer le déterminant de f_A. En déduire une condition à laquelle f_A est un isomorphisme. Donner, dans ce cas, l'expression de f_A^{-1}.
4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que f_A est un isomorphisme et donner la matrice de f_A^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.