Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2020-2021
Compléments d'analyse

Feuille 5 : L'espace de Hilbert L^2

1 Espace L^2

Exercice 1 Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace préhilbertien et $u, v \in E$. Montrer *l'identité du parallélogramme :*

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2. \tag{1}$$

En déduire que, pour $p \neq 2$, la norme $\|.\|_p$ sur L^p n'est pas associée à un produit scalaire. Faire de même avec la norme $\|.\|_p$ sur ℓ^p.

Exercice 2 Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ mesurable telle que $x \in [1, +\infty[\mapsto x^2 f^2(x) \in \mathbb{R}^+ \in \mathscr{L}^2([1, +\infty[)$. Montrer que :

$$\left(\int_{[1,+\infty]} f \, d\lambda \right)^2 \leqslant \int_{[1,+\infty]} x^2 f^2(x) \, d\lambda(x)$$

Pour quelles fonctions a-t-on égalité ?

Exercice 3 On considère le sous-ensemble F de $L^2(\mathbb{R})$ défini par

$$F = \{ f \in L^2(\mathbb{R}), f(x) = 0 \ \lambda\text{-p.p. sur }]-\infty, 0[\}$$

- Montrer que F est un s.e.v. fermé de $L^2(\mu)$ et que

$$F^\perp = \{ f \in L^2(\mathbb{R}), f(x) = 0 \ \lambda\text{-p.p. sur } [0, +\infty[\}$$

- On note $p_F : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ la projection orthogonale sur F, et $p_{F^\perp} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ la projection orthogonale sur $F^\perp$. Montrer que

$$p_F(f) = f \mathbb{1}_{[0,+\infty[}; \quad p_{F^\perp}(f) = f \mathbb{1}_{]-\infty,0[}.$$

Exercice 4 Déterminer le polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$Q\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$