Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2020-2021
Compléments d'analyse

Exercices de révision : Rappels de théorie de la mesure

Exercice 1 Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable et $\mu_1, \mu_2 : \mathscr{T} \to [0, +\infty]$ deux mesures sur $(X, \mathscr{T})$.

- Montrer que $\mu = \mu_1 + \mu_2$ est une mesure sur $(X, \mathscr{T})$.
- Montrer que $\mathscr{L}^1(X, \mathscr{T}, \mu) = \mathscr{L}^1(X, \mathscr{T}, \mu_1) \cap \mathscr{L}^1(X, \mathscr{T}, \mu_2)$.
- Montrer que pour tout $f \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{T}, \mu)$,

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f\, d\mu_1 + \int_X f\, d\mu_2$$

Exercice 2 Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable et $f \in \mathscr{L}^0((X, \mathscr{T}); \mathbb{R})$.

1. Montrer que $\sigma(f) = \{f^{-1}(B), B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}$ est une sous-tribu de $\mathscr{T}$, et que c'est la plus petite tribu telle que f soit mesurable de $(X, \sigma(f))$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.
2. Montrer que $\mathscr{L}^0((X, \sigma(f)); \mathbb{R}) = \{\varphi \circ f, \varphi \in \mathscr{L}^0((\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}); \mathbb{R})\}$.

Exercice 3 Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_n \in (\mathscr{L}^0((X, \mathscr{T}); \mathbb{R}_+))^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives. Montrer que

$$\int_X^* (\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n)\, d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_X^* f_n\, d\mu$$

En déduire que si la série de terme général $a_n = \int_X^* f_n\, d\mu$ converge, alors $f_n \to 0$ μ-presque partout sur X.

Exercice 4 Soit X un ensemble non vide. On considère l'espace mesurable $(X, \mathcal{P}(X))$, sur lequel on définit

$$\mu : A \in \mathcal{P}(X) \mapsto \mathrm{Card}(A) \in [0, +\infty]$$

1. Montrer que μ est une mesure sur $(X, \mathcal{P}(X))$. On l'appelle *mesure de comptage* sur X.
2. Déterminer les ensembles μ-négligeables de $(X, \mathcal{P}(X))$.
3. Montrer que la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ est σ-finie, mais que la mesure de comptage sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ ne l'est pas.
4. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ une fonction positive. Montrer que f est mesurable de $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ et que son intégrale par rapport à la mesure de comptage est

$$\int_{\mathbb{N}}^* f\, d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n).$$

5. Soit $(u_{n,p}) \in (\mathbb{R}_+)^{(\mathbb{N} \times \mathbb{N})}$. Justifier que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{p \in \mathbb{N}} u_{n,p} = \sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} u_{n,p}.$$

   Calculer $\sum_{p \geqslant 2} \sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^p}$

Exercice 5 Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Pour $f, g \in \mathscr{L}^0((X, \mathscr{T}); \mathbb{R})$, on note $f \sim g$ si $f = g$ μ-p.p. Montrer que

1. $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. Si $f \sim \tilde{f}$ et $g \sim \tilde{g}$ alors $f + g \sim \tilde{f} + \tilde{g}$;
3. Si $(f_n)_n, (\tilde{f}_n)_n \in (\mathscr{L}^0((X, \mathscr{T}); \mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ sont deux suites telles que $f_n \to f$ μ-p.p, $\tilde{f}_n \to \tilde{f}$ μ-p.p, et pour tout n, $f_n \sim \tilde{f}_n$, alors $f \sim \tilde{f}$.