Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2022-2023
Compléments d'analyse

Feuille 1 : Inversion locale et fonctions implicites

1 Inversion locale

Exercice 1

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x+y, xy)$. Au voisinage de quels points de $\mathbb{R}^2$ f est-elle un C^1-difféomorphisme local ?
2. Même question pour l'application g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$g(x,y,z) = (x+y+z, xy+yz+zx, xyz)$$

Exercice 2 On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (e^x \cos(y), e^x \sin(y)). \end{array}$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et que sa différentielle est inversible en tout point, mais que f n'est pas injective.
2. Montrer que f est surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Cette fonction réalise-t-elle un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$?

Exercice 3 Montrer que l'application

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto (x^2 - y^2, xy) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

est bien définie et réalise en tout point un difféomorphisme local de classe $\mathcal{C}^1$, mais n'est pas un difféomorphisme global.

Exercice 4 Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $|a|+|b| < r$, le système

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5x^2y^3 = a \\ x - y + \sin(x^6y^3) = b \end{cases}$$

admet une solution $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 5 Soient a, $b \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x + a\cos(y), y + b\sin(x)). \end{array}$$

1. A quelle condition sur (a,b) la fonction f est-elle un difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^2$? On suppose par la suite que cette condition est vérifiée.
2. Montrer que pour tout $(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2$, on a $|\sin(t_1) - \sin(t_2)| \leqslant |t_1 - t_2|$.
3. En déduire que f réalise un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image.

Exercice 6 Montrer que $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto f(x,y,z) = (e^y + e^z, e^x + e^y, x - y) \in \mathbb{R}^3$ est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $f(\mathbb{R}^3)$.

Exercice 7 On considère l'application $\phi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que ϕ est différentiable en I_n et donner sa différentielle.
2. En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ t.q. $\|A - I_n\| < \alpha$, A admet une racine carrée.

2 Théorème des fonctions implicites

Exercice 8 On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1).$$

Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = 0$. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert I de x_0 dans $\mathbb{R}$ et une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ telle que $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ et $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$. Déterminer la dérivée de φ sur I en fonction de x et $\varphi(x)$.

Exercice 9 On considère l'application $F : (x,y) \in R^2 \mapsto x^2 + y^2 - 1 \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer qu'il existe un intervalle I contenant 0 tel que, pour chaque $x \in I$, il existe un unique $y = y(x) > 0$ tel que $F(x,y) = 0$.
2. Montrer que $y'(x) = -\frac{x}{y}$.

Exercice 10 On considère le système d'équations :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 & = 0 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 & = 4 \end{cases}$$

Montrer que, pour x proche de 0, il existe des fonctions positives $y(x)$ et $z(x)$ telles que $(x, y(x), z(x))$ soit solution du système.

Déterminer y' en fonction de x, y et déterminer z' en fonction de x, z.

Exercice 11 On considère l'équation $e^x + e^y + x + y - 2 = 0$. Montrer qu'il existe un voisinage U de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$, un intervalle I contenant 0 et une application $\phi : I \to \mathbb{R}$ telle que $(x,y) \in U$ est solution de l'équation ssi $x \in I$ et $y = \phi(x)$.

Calculer le développement limité d'ordre 2 de ϕ en 0.

Exercice 12 Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$.

1. Etant donné $(a_0, b_0, c_0, X_0) \in \mathbb{R}^4$ tel que $P_0(X_0) = 0$, avec $P_0(X) = X_0^3 + a_0 X_0^2 + b_0 X_0 + c_0$, trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de (a_0, b_0, c_0) et une application $X : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ telle que
$$X(a_0, b_0, c_0) = X_0, \quad \forall (a,b,c) \in \mathcal{U},\ P(X(a,b,c)) = 0.$$
2. Soit $\Omega = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3;\ P(X) \text{ admet 3 racines distinctes}\}$.
   (i) Montrer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
   (ii) Montrer que l'application $\Theta : \Omega \to \mathbb{R}^3,\ (a,b,c) \mapsto (x,y,z)$, où $x < y < z$ désignent les 3 racines distinctes de P, est un C^1-difféomorphisme de Ω sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 13 On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $x^3 - xy + 2y^2 = 1$. Déterminer l'équation de la tangente à cette courbe au point $(1,0)$ et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Exercice 14 On considère la surface $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 - xy^3 - y^2 z + z^3 = 0\}$. Montrer qu'au voisinage du point $(1,1,1)$, la surface $\mathcal{S}$ est décrite par une équation de la forme $z = \phi(x,y)$, où ϕ est une fonction de classe C^1 au voisinage de $(1,1)$.

Exercice 15 On considère la fonction

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^x + x^2 y + y + y^2$$

1. Montrer qu'il existe I voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ et $\phi : I \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in I$, $f(t, \phi(t)) = 1$.
2. Montrer que l'équation différentielle
$$y'(t) = -\frac{e^t + 2ty(t)}{1 + t^2 + 3y^2(t)},\ y(0) = 0$$
admet une solution définie sur un intervalle $]-a, a[$.

Exercice 16 (Théorème de l'enveloppe)

Soient $n > p$ et $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^p$ deux ouverts. On considère une fonction C^2 sur $U \times V$ à valeurs réelles :

$$f : (x, \alpha) \in U \times V \mapsto f(x, \alpha) \in \mathbb{R}$$

On pose, pour chaque $\alpha_0 \in V$, $f_{\alpha_0} : x \in U \mapsto f(x, \alpha)$ et on s'intéresse au problème d'optimisation

$$(\mathcal{P}(\alpha)) \quad \begin{cases} \text{Minimiser } f_\alpha(x) \\ x \in U \end{cases}$$

Plus spécifiquement, on veut comprendre comment le minimum de f_α et la valeur minimale de f_α dépendent de α.

Soient $\alpha_0 \in V$ et $x_0 \in U$ tels que $\nabla f_{\alpha_0}(x_0) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $Hf_{\alpha_0}(x_0)$ st symétrique définie positive. Ainsi, d'après la Condition Suffisante d'ordre 2, x_0 est solution de $\mathcal{P}(\alpha_0)$.

1. Justifier qu'il existe $r > 0$ tel que

$$\begin{gathered} B(x_0, r) \subset U,\ B(\alpha_0, r) \subset V \text{ et} \\ \forall x \in B(x_0, r), \forall \alpha \in B(\alpha_0, r), Hf_\alpha(x) \text{ définie positive.} \end{gathered}$$

   On admet que l'ensemble des matrices définies positives est un ouvert de l'e.v. des matrices symétriques. Mais essayez de le montrer !

2. Justifier qu'il existe un voisinage V_1 de α_0, un voisinage U_1 de x_0 et une fonction $\varphi : V_1 \to U_1$, de classe C^1 sur V_1, telle que

$$\begin{matrix} (x, \alpha) \in U_1 \times V_1 \\ x \text{ point critique de } f_\alpha \end{matrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} \alpha \in V_1 \\ x = \varphi(\alpha) \end{matrix}$$

   Indice : Quelle serait la fonction g dont on cherche les zéros au voisinage de (x_0, α_0) ? Quelle est sa jacobienne ?

3. Justifier qu'il existe $s \in]0, r[$ tel que $B(\alpha_0, s) \subset V_1$, et, pour tout $\alpha \in B(\alpha_0, s)$, $\varphi(\alpha) \in B(x_0, r)$.

4. Justifier que, pour tout $\alpha \in B(\alpha_0, s)$, pour tout $x \in U_1$, on a

$$f_\alpha(x) \geqslant f_\alpha(\varphi(\alpha))$$

5. On note $v : \alpha \in B(\alpha_0, s) \in \mathbb{R}^p \mapsto f_\alpha(\varphi(\alpha)) \in \mathbb{R}$. Déterminer $\nabla v(\alpha)$.