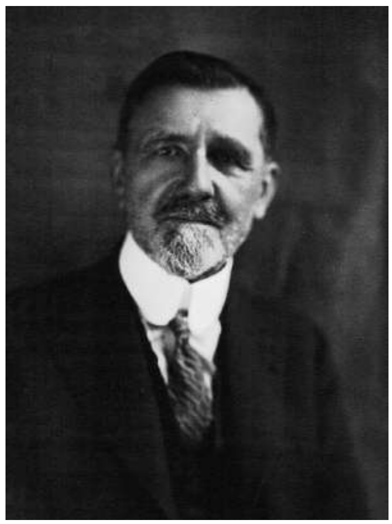
Chap IV - Espaces $\mathcal{L}^p(\mu)$ et $L^p(\mu)$



1 Introduction

L'intérêt de la modélisation mathématique, c'est de ramener une question qui se pose dans le monde réel à une équation (ou un problème d'optimisation).

On a vu la puissance du calcul différentiel pour répondre à ce genre de questions.

Certains phénomènes se modélisent par des équations dont les solutions sont des fonctions.

$\rightsquigarrow$ Par exemple, la température $u(x,t)$ à la position x et à l'instant t se diffuse suivant *l'équation de la chaleur*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

et il s'agit de trouver u.

En général, pour répondre à ce genre de questions, on fait appel à des méthodes de topologie, sur des espaces vectoriels normés de fonctions. Ces espaces vectoriels sont de dimension infinie, donc toutes les normes n'y sont pas équivalentes: d'où l'intérêt de choisir "la bonne norme" pour étudier un problème donné.

- Pour quel choix de norme N sur les espaces vectoriels $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ l'application linéaire

$$D : u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \mapsto \frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

  est-elle continue ?

- Quelles sont les valeurs propres de l'application linéaire $u \mapsto \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$? Peut-on décomposer toute fonction comme somme de vecteurs propres ?

- L'e.v.n. $(\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), N)$ est-il complet ?

  $\rightsquigarrow$ Peut-on utiliser le théorème du point fixe?

- Peut-on montrer que l'ensemble des solutions admissibles est compact ? Peut-on trouver une suite d'approximations qui converge vers la "vraie" solution ?

  $\rightsquigarrow$ D'où l'intérêt aussi de disposer d'un vaste choix de normes !

2 Espaces $\mathscr{L}^p(\mu)$

On fixe un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$.

On va introduire une famille de normes sur des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{L}^0(X, \mathscr{T}, \mathbb{R})$, paramétrées par $p \in [1, +\infty]$:

Définition 1. *Soit $p \in [1, +\infty[$, on définit*

$$\mathscr{L}^p(\mu) = \left\{ f \in \mathscr{L}^0(X, \mathscr{T}, \mathbb{R}), \int_X^* |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

et, pour $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$, on pose

$$N_p(f) = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Remarque 2. *$\mathscr{L}^1(\mu)$ est donc l'ensemble des fonctions μ-intégrables $\mathscr{L}^1((X, \mathscr{T}, \mu); \mathbb{R})$.*

Exemple: Pour $(X, \mathscr{T}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ l'ensemble des entiers munis de la mesure de comptage, on a

$$\mathscr{L}^p(\mu) = \left\{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|^p < \infty \right\}$$

On note généralement cet ensemble ℓ^p.

$\rightsquigarrow$ On le verra, l'espace des suites de carré sommable ℓ^2 s'avèrera particulièrement intéressant.

Exercice: Pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit

$$f_\alpha : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{x^\alpha} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$$

$\rightsquigarrow$ Pour quels $p \geq 1$ a-t-on $f_\alpha \in \mathscr{L}^p(\lambda_1)$, où λ_1 est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$?

Soit $p \in [1, +\infty[$ fixé. On va montrer que $\mathscr{L}^p(\mu)$ est un espace vectoriel. Pour cela, on montre que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}^0((X, \mathscr{T}); \mathbb{R})$.

1. La fonction nulle vérifie bien $\int_X^* |0|^p d\mu = 0 < \infty$, donc elle appartient à $\mathscr{L}^p(\mu)$.

2. Soient $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\int_X^* |\lambda f|^p d\mu = |\lambda|^p \int_X^* |f|^p d\mu < \infty$, donc $\lambda f \in \mathscr{L}^p(\mu)$.

3. Soient $f, g \in \mathscr{L}^p(\mu)$, montrons que $f + g \in \mathscr{L}^p(\mu)$.

   Remarquons que, pour tout $x \in X$, puisque $t \mapsto t^p$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$,

   $$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p$$

   En fait, mieux que ça, $t \mapsto t^p$ est *convexe* sur $\mathbb{R}^+$ donc, pour tous $a, b \geq 0$,

   $$\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}b^p \text{ i.e. } (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

   donc, pour tout $x \in X$

   $$(|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^{p-1}(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

   d'où finalement

   $$\int_X^* |f+g|^p d\mu \leq 2^{p-1} \left(\int_X^* |f|^p d\mu + \int_X^* |g|^p d\mu \right) < \infty$$

   donc $f + g \in \mathscr{L}^p(\mu)$

Proposition 1. *Pour tout $p \geq 1$, $\mathscr{L}^p(\mu)$ est un espace vectoriel.*

$\rightsquigarrow$ On s'attend à ce que N_p définisse une norme sur $\mathscr{L}^p(\mu)$.

(N1) On a, pour tout $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$, $N_p(f) = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$

(N2) Il faut montrer que $N_p(f) = 0$ ssi $f = 0_{\mathscr{L}^p(\mu)}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $f(x) = 0$ pour tout $x \in X$, $N_p(f) = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = 0$

$\rightsquigarrow$ Il faut aussi montrer la réciproque: on y reviendra dans un instant.

(N3) Soit $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$N_p(\lambda f) = \left(\int_X |\lambda f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p \int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| N_p(f)$$

(N4) **Inégalité triangulaire**

Soient $f, g \in \mathscr{L}^p(\mu)$. Il s'agit de montrer que $N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g)$.

$\rightsquigarrow$ Pour cela, il va nous falloir quelques résultats intermédiaires.

Un cas particulier qu'on connaît déjà: $p = 2$.

Dans le cas où $p = 2$, on a

$$N_2(f+g)^2 = \int_X^* |f+g|^2 d\mu \leq \int_X^* |f|^2 + 2|fg| + |g|^2 d\mu = \int_X^* |f|^2 d\mu + 2\int_X^* |fg| d\mu + \int_X^* |g|^2 d\mu$$

et on dispose de l'*inégalité de Cauchy-Schwartz*:

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X |g|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} = N_2(f) N_2(g)$$

qui nous donne

$$N_2(f+g)^2 = \int_X^* |f+g|^2 d\mu \leq N_2(f)^2 + 2N_2(f)N_2(g) + N_2(g)^2 = (N_2(f) + N_2(g))^2 \text{ d'où}$$

$$N_2(f+g)2 \leq N_2(f) + N_2(g)$$

Pour passer à un $p \geq 1$ quelconque, on va démontrer une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz: *l'inégalité de Hölder.*

Définition 3. *On dit que $p, q \in [1, +\infty[$ sont des exposants conjugués si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Exemple: $p = 2, q = 2$ sont conjugués, ainsi que $p = 4, q = \frac{4}{3}$.

$\rightsquigarrow$ Si $p > 1$, l'exposant conjugué de p est $q = \dfrac{p}{p-1} > 1$.

Proposition 2 (Inégalité de Hölder)**.** *Soient p, q deux exposants conjugués, $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$. Alors $fg \in \mathscr{L}^1(\mu)$ et*

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

Autrement dit, $N_1(fg) \leq N_p(f) N_q(g)$.

Preuve

On va utiliser l'inégalité suivante, appelée *inégalité de Young*:

$$\boxed{\forall a, b \geq 0,\ ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q}$$

(et on a égalité ssi $a^p = b^q$).

Preuve de l'inégalité de Young: Si $a = 0$ ou $b = 0$, il n'y a rien à montrer. Supposons donc $a > 0$ et $b > 0$ et notons $x = p\ln(a)$ (donc $a = e^{\frac{x}{p}}$) et $y = q\ln(b)$ (donc $b = e^{\frac{y}{q}}$). Alors, puisque la fonction exp est convexe, on a

$$\exp\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) \leq \frac{1}{p}e^x + \frac{1}{q}e^y$$

Or, $\exp\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) = \exp(\ln(a) + \ln(b)) = \exp(\ln(ab)) = ab$, $e^x = a^p$, et $e^y = b^q$. $\square$

Passons maintenant à l'inégalité de Hölder.

Si $f = 0$ μ-p.p (ou $g = 0$ μ-p.p), alors $fg = 0$ μ-p.p et l'inégalité est vérifiée.

Sinon, $N_p(f) > 0$ et $N_q(g) > 0$ et on peut poser, pour tout $x \in X$,

$$F(x) = \frac{|f(x)|}{N_p(f)},\ G(x) = \frac{|g(x)|}{N_q(g)}$$

Alors $F \in \mathscr{L}^p(\mu)$, $G \in L^q(\mu)$ et, par Young, on a pour tout $x \in X$

$$F(x)G(x) \leq \frac{1}{p}F(x)^p + \frac{1}{q}G(x)^q \quad \text{i.e.}$$

$$\frac{1}{N_p(f)N_q(g)}|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}\frac{1}{N_p(f)^p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}\frac{1}{N_q(g)^q}|g(x)|^q$$

On obtient que fg est intégrable (autrement dit $fg \in \mathscr{L}^1(\mu)$) et en intégrant sur X, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N_p(f)N_q(g)} \int_X |f(x)g(x)| d\mu &\leq \frac{1}{p} \frac{1}{N_p(f)^p} \int_X |f(x)|^p d\mu + \frac{1}{q} \frac{1}{N_q(g)^q} \int_X |g(x)|^q d\mu \\
&\leq \frac{1}{p} \frac{1}{N_p(f)^p} N_p(f)^p + \frac{1}{q} \frac{1}{N_q(g)^q} N_q(g)^q \\
&\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

et on obtient Hölder en multipliant cette dernière inégalité par $N_p(f)N_q(g)$. □

De là, on peut démontrer l'inégalité triangulaire pour N_p, appelée dans ce cas *inégalité de Minkowski*.

Pour $p = 1$, c'est une conséquence de l'inégalité triangulaire classique $|f + g| \leq |f| + |g|$.

Pour $p > 1$, posons $q = \dfrac{p}{p-1}$ l'exposant conjugué. On a

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p = |f|(|f| + |g|)^{p-1} + |g|(|f| + |g|)^{p-1}.$$

Posons $h = (|f| + |g|)^{p-1}$. Alors $h \in \mathscr{L}^q(\mu)$: h est mesurable positive et

$$\int_X^* h^q d\mu = \int_X^* (|f| + |g|)^{q(p-1)} d\mu = \int_X^* (|f| + |g|)^p d\mu < \infty$$

car $|f|, |g| \in \mathscr{L}^p(\mu)$, donc $|f| + |g|$ aussi puisque $\mathscr{L}^p(\mu)$ est un espace vectoriel. De plus,

$$N_q(h) = N_p(|f| + |g|)^{\frac{p}{q}} = N_p(|f| + |g|)^{p-1}$$

On peut donc appliquer l'inégalité de Hölder à $|f|$ et h d'une part, à $|g|$ et h d'autre part:

$$\begin{aligned}
\int_X |f| h d\mu &\leq N_p(f)N_q(h) = N_p(f)N_p(|f| + |g|)^{p-1} \\
\int_X |g| h d\mu &\leq N_p(g)N_q(h) = N_p(g)N_p(|f| + |g|)^{p-1}
\end{aligned}$$

donc

$$N_p(|f|+|g|)^p = \int_X (|f|+|g|)^p d\mu \leq N_p(|f|+|g|)^{p-1}(N_p(f)+N_p(g)) \text{ donc}$$
$$N_p(|f|+|g|) \leq N_p(f)+N_p(g)$$

et on conclut en observant que $N_p(f+g) \leq N_p(|f|+|g|)$. $\square$

Mais revenons à la propriété **(N2)** des normes: $N_p(f)=0$ ssi $f=0_{\mathscr{L}^p(\mu)}$.

Soit $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$. Supposons que $N_p(f)=0$. Alors $|f|^p$ est une fonction mesurable positive sur $(X,\mathscr{T})$ dont l'intégrale est nulle. Donc $f=0$ sur X...μ-p.p..

Donc, s'il existe un ensemble N non vide et μ-négligeable, alors son indicatrice $f=1_N$ est dans $\mathscr{L}^p(\mu)$, $N_p(f)=0$ mais $f \neq 0_{\mathscr{L}^p(\mu)}$. Donc, dans ce cas, N_p ne définit pas une norme sur l'espace vectoriel $\mathscr{L}^p(\mu)$.

Donc, si $f,g \in \mathscr{L}^p(\mu)$ sont égales μ-p.p., $N_p(f-g)=0$: la "distance" entre f et g est nulle, ou encore, N_p ne voit pas la différence entre f et g.

On a seulement:

Pour tout $p \geq 1$, $\mathscr{L}^p(\mu)$ est un espace vectoriel et $N_p : \mathscr{L}^p(\mu) \to \mathbb{R}^+$ vérifie

- Si $f=0_{\mathscr{L}^p(\mu)}$ alors $N_p(f)=0$
- Pour tous $f \in L^p(\mu)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $N_p(\lambda f)=|\lambda| N_p(f)$
- Pour toutes $f,g \in \mathscr{L}^p(\mu)$, $N_p(f+g) \leq N_p(f)+N_p(g)$.

$\rightsquigarrow$ On dit que N_p est une semi-norme sur $L^p(\mu)$.

Parfois, ce n'est pas un problème:

Exercice: On considère $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)$ l'ensemble des entiers muni de la mesure de comptage.

1. Montrer que si A est μ-négligeable alors $A=\emptyset$.
2. En déduire que, pour tout $p \geq 1$,

$$\ell^p = \left\{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p < \infty \right\}$$

muni de $\|(u_n)_n\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p < \infty\right)^{\frac{1}{p}}$ est un espace vectoriel normé.

Mais dans un des cas qui nous intéresse le plus, $(I, \mathscr{B}(I))$ muni de la mesure de Lebesgue λ_1, le problème se pose:

Exercice: Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $p \geq 1$. Donner un exemple de fonction $f \in \mathscr{L}^p(\lambda_1)$ telle que f n'est pas la fonction nulle sur I, mais $N_p(f) = 0$.

3 Espaces $L^p(\mu)$

Pour contourner le problème, on va tricher. Au lieu de travailler avec des fonctions proprement dites, on va introduire un espace vectoriel dont les éléments sont des *ensembles* de fonctions.

Définition 4. *Soit $p \geq 1$. Pour chaque $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$, on définit*

$$[f] = \{h \in \mathscr{L}^p(\mu),\ f = h\ \mu\text{-}p.p.\}$$

On note $L^p(\mu) = \{[f],\ f \in \mathscr{L}^p(\mu)\}$.

Rigoureusement parlant, $[f]$ est la *classe d'équivalence* de f par rapport à la relation d'équivalence $\sim$ définie sur $\mathscr{L}^p(\mu)$ par

$$f \sim g \iff f = g\ \mu\text{-p.p. sur} X$$

et $L^p(\mu)$ est alors l'ensemble *quotient* $\mathscr{L}^p(\mu)/\sim$ par cette relation.

Exercice: Sur $([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda_1)$, on considère la fonction f définie par

$$f : x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} x^2 \text{ si } x \neq 1 \\ 3 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est borélienne, puis que $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$ pour tout $p \geq 1$.
2. Trouver un représentant continu de $[f]$.
3. Trouver une fonction g dans $\mathscr{L}^p(\mu)$ telle que $[g]$ n'admet pas de représentant continu.

On va voir qu'on peut définir une addition et une multiplication scalaire sur $L^p(\mu)$, qui en feront un espace vectoriel. Mais du coup, il faut préciser ce qu'on entend par la somme de deux classes de fonctions, et comment multiplier une classe de fonctions par 37.6.

De plus, si α, β sont deux éléments de $L^p(\mu)$, $f \in \alpha$ et $g \in \beta$, alors $[f+g] \in L^p(\mu)$ (puisque $\mathscr{L}^p(\mu)$ est un espace vectoriel), et $[f+g]$ ne dépend pas des représentants choisis: si $\tilde{f} \in \alpha$ et $\tilde{g} \in \beta$ sont deux autres représentants, alors $[f+g] = [\tilde{f} + \tilde{g}]$ (Montrez-le !). On note alors $[f+g] = \alpha + \beta$.

$\rightsquigarrow$ L'opération $([f],[g]) \in L^p(\mu) \times L^p(\mu) \mapsto [f+g] \in L^p(\mu)$ est bien définie.

De la même façon, si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in L^p(\mu)$, alors pour tous $f, \tilde{f} \in \alpha$, $[\lambda f] = [\lambda \tilde{f}]$. On peut donc noter $\lambda\alpha = [\lambda f]$.

$\rightsquigarrow$ L'opération $(\lambda, [f]) \in \mathbb{R} \times L^p(\mu) \mapsto [\lambda f] \in L^p(\mu)$ est bien définie.

Proposition 3. *Muni des opérations*

- $([f],[g]) \in L^p(\mu) \times L^p(\mu) \mapsto [f+g] \in L^p(\mu)$
- $(\lambda, [f]) \in \mathbb{R} \times L^p(\mu) \mapsto [\lambda f] \in L^p(\mu)$

l'ensemble $L^p(\mu)$ est un espace vectoriel. Son vecteur nul est

$$[0] = \{z \in \mathscr{L}^p(\mu), z = 0 \ \mu\text{-}p.p.\ \ surX\}$$

Mieux encore,

Proposition 4. *L'opération*

$$[f] \in L^p(\mu) \mapsto \|[f]\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}^+$$

est aussi bien définie (autrement dit la valeur de $\|[f]\|_p$ ne dépend pas du représentant de $[f]$ choisi) et est une norme sur $L^p(\mu)$.

ce qui résoud notre problème initial.

Souvent, par abus de langage, on parlera de "fonction" $f \in L^p(\mu)$, bien que les éléments de $L^p(\mu)$ ne soient, techniquement, pas des fonctions.

Le prix qu'on paie, c'est qu'on ne peut pas calculer la valeur en un point $x_0 \in X$ d'une "fonction" $f \in L^p(\mu)$. Contrairement à la somme, à la multiplication scalaire et à la norme, l'opération *d'évaluation*:

$$ev_{x_0} : [f] \in L^p(\mu) \mapsto f(x_0)$$

n'est pas bien définie.

Exemple: Reprenons la fonction

$$f : x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} x^2 \text{ si } x \neq 1 \\ 3 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

On aurait donc, a priori, $ev_1([f]) = f(1) = 3$. Mais on a vu que la fonction $\tilde{f} : x \in [0,1] \mapsto x^2$ est aussi un représentant de $[f]$, donc on aurait aussi $ev_1([f]) = \tilde{f}(1) = 1$. Or, il semble que $1 \neq 3$...

Cela dit, ce n'est pas leur valeur en des points spécifiques qui nous intéressent dans ces fonctions (en probabilités et statistiques par exemple, la plupart des opérations intéressantes font intervenir des intégrales, et donc peu importe le représentant choisi). Il faut simplement garder en tête, lorqu'on parle de "fonction" L^p, qu'on est aussi myope que la mesure μ et qu'on ne voit pas la différence entre deux fonctions égales presque partout.

Théorème 5 (Riesz-Fischer)**.** *Pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'espace vectoriel normé $(L^p(\mu), \|.\|_p)$ est complet.*

Remarque 6.

Si on avait utilisé l'intégrale de Riemann, l'ensemble $L^p(\mu)$ n'aurait pas été complet: c'est un des grands avantages de l'intégrale de Lebesgue (et c'est pour ça qu'on donne son nom à ces e.v.n.)

Il va donc s'agir de montrer que si une suite $(f_n)_n$ de "fonctions" de $L^p(\mu)$ est de Cauchy, alors elle converge vers une "fonction" $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$.

Il est important de distinguer deux convergences: la convergence dans $L^p(\mu)$ et la convergence simple (μ-p.p.):

- On dit qu'une suite $(f_n)_n \in (L^p(\mu))^{\mathbb{N}}$ converge vers $f \in L^p(\mu)$ dans $L^p(\mu)$ (ou "en norme $L^p(\mu)$") si

$$\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \text{ i.e. } \int_X |fn - f|^p d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

- $(f_n)_n$ converge simplement vers f μ-p.p. si

$$\mu(\{x \in X,\ f_n(x) \nrightarrow f(x)\}) = 0$$

Exercice:

1. Vérifier que $A = \{x \in X,\ f_n(x) \nrightarrow f(x)\} \in \mathscr{T}$
   Indice: $x \in A \iff \exists m \in \mathbb{N}^*, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{m}$.
2. Montrer que la convergence simple μ-p.p. ne dépend pas du choix des représentants de $[f_n]$ et $[f]$ (autrement dit, elle a un sens sur $L^p(\mu)$).

$\rightsquigarrow$ Ces deux modes de convergence sont différents !

Contre-exemple 1: La suite de fonctions $(f_n)_n$ définie sur $[0,1]$ par

$$f_n = n^{\frac{1}{p}} \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$$

converge simplement vers la fonction nulle μ-p.p. sur $[0,1]$ mais pas dans $L^p([0,1])$.

Contre-exemple 2: Considérons la suite de fonctions donnée par

$$\begin{aligned} f_1 = \mathbb{1}_{[0,1]}, \\ f_2 = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}, f_3 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}, \\ f_4 = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{4}]}, f_5 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}, f_6 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]}, f_7 = \mathbb{1}_{[\frac{3}{4},1]}, \end{aligned}$$

et plus généralement, en définissant $k = \lceil \log_2(n) \rceil$ et $j = n - 2^k$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } \frac{j}{2^k} \leq x \leq \frac{j+1}{2^k} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

(voir ici: `https://www.math3ma.com/blog/on-constructing-functions-part-6`)

Alors $(f_n)_n$ converge vers la fonction nulle dans $L^p(\mu)$ quel que soit $p \geq 1$, mais, quel que soit $x \in [0,1]$, $f_n(x) \nrightarrow 0$.

Il y a quand même un lien entre les deux:

Proposition 5. *Si $(f_n)_n$ converge vers f dans $L^p(\mu)$ alors il existe une sous-suite $(f_{\phi(n)})_n$ qui converge simplement vers f μ-p.p. sur X.*

Preuve: Puisque $\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, on peut construire, par récurrence, des entiers

$$\phi(0) < \phi(1) < \phi(2) < ...$$

tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_{\phi(n)} - f\|_p^p = \int_X |f_{\phi(n)} - f|^p d\mu < \frac{1}{2^n}$$

Or, $(|f_{\phi(n)} - f|^p)_n$ est une suite de fonctions mesurables positives de $(X, \mathscr{T})$ donc, par le théorème de convergence monotone,

$$\int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_{\phi(n)} - f|^p d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_{\phi(n)} - f|^p d\mu \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} < \infty$$

On en déduit que la fonction $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_{\phi(n)} - f|^p$ est intégrable, donc finie μ-p.p.

Autrement dit, pour presque tout $x \in X$, la série de terme général $(|f_{\phi(n)}(x) - f(x)|^p)_n$ converge, ce qui implique que

$$|f_{\phi(n)}(x) - f(x)|^p \to 0 \text{ i.e. } f_{\phi(n)}(x) \to f(x)$$

Autrement dit, $(f_\phi(n))_n$ converge simplement vers f μ-p.p. sur X. □

Preuve du théorème de Riesz-Fisher

On va démontrer le théorème en utilisant un raisonnement similaire.

Soit $(f_n)_n \in L^p(\mu)$ une suite de Cauchy: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $q \geq p \geq N$,

$$\|f_q - f_p\|_p < \varepsilon$$

En utilisant ceci avec $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$, on construit par récurrence une fonction ψ : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_{\psi(n+1)} - f_{\psi(n)}\|_p < \frac{1}{2^n}$$

On définit une nouvelle suite de fonctions sur X par

$$g_n : x \in X \mapsto \sum_{k=0}^{n} |f_{\psi(k+1)}(x) - f_{\psi(k)}(x)| \in \mathbb{R}$$

ainsi que

$$g : x \in X \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} |f_{\psi(k+1)}(x) - f_{\psi(k)}(x)| \in \overline{\mathbb{R}}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n \in L^p(\mu)$ et, plus précisément, par l'inégalité de Minkowski, on a, pour tout n,

$$\|g_n\|_p \leq \sum_{k=0}^{n} \|f_{\psi(k+1)} - f_{\psi(k)}\|_p \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} < 2$$

De plus, $(g_n)_n$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives, et, pour tout $x \in X$, $g_n(x) \to g(x)$. Donc, par le théorème de convergence monotone,

$$\int^* g^p d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X^* g_n^p \, d\mu \leq 2^p < \infty$$

$\rightsquigarrow$ g^p est intégrable, en particulier g^p est finie μ-p.p. sur X, et donc g aussi.

Autrement dit, pour presque tout $x \in X$, la série de t.g. $(f_{\psi(n+1)}(x) - f_{\psi(n)}(x))_n$ converge absolument, donc converge.

Or, pour un tel x, la suite des sommes partielles de cette série est donnée par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (f_{\psi(k+1)}(x) - f_{\psi(k)}(x)) = f_{\psi(n+1)}(x) - f_{\psi(0)}(x)$$

donc, si on pose $f(x) = f_{\psi(0)}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (f_{\psi(k+1)}(x) - f_{\psi(k)}(x))$, on a

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_{\psi(n)}(x)$$

Définissons donc la fonction f sur X tout entier par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si la série de t.g. } (f_{\psi(n+1)}(x) - f_{\psi(n)}(x))_n \text{ ne converge pas} \\ f_{\psi(0)}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (f_{\psi(k+1)}(x) - f_{\psi(k)}(x)) \text{ sinon.} \end{cases}$$

Alors $f_{\psi(n)} \to f$ presque partout sur X, et pour tout x,

$$|f_{\psi(n)}(x)|^p \leq |f_{\psi(0)}(x) + g(x)|^p$$

or $|f_{\psi(0)} + g|^p$ est intégrable puisque $f_{\psi(0)}, g \in L^p$, donc par le théorème de convergence dominée, $|f|^p$ est in tégrable sur X, autrement dit $f \in L^p(\mu)$.

Enfin,

$$\begin{cases} |f_{\psi(n)}(x) - f(x)| \to 0 \ \mu - p.p. \\ |f_{\psi(n)}(x) - f(x)|^p \leq (|f_{\psi(0)}(x) - f(x)| + g(x))^p \quad \text{pour tout } x \in X \end{cases}$$

avec $(|f_{\psi(0)}(x) - f(x)| + g(x))^p$ intégrable puisque $f_{\psi(0)}, f, g \in L^p(\mu)$, donc, toujours par le théorème de convergence monotone,

$$\int_X |f_{\psi(n)} - f|^p d\mu \to 0 \text{ i.e. } \|f_{\psi(n)} - f\|_p \to 0$$

$\rightsquigarrow$ La sous-suite $(f_{\psi(n)})_n$ converge dans $L^p(\mu)$.

Puisque $(f_n)_n$ est de Cauchy, ceci suffit à montrer que $(f_n)_n$ converge dans $L^p(\mu)$. $\square$

Corollaire 1. *L'espace $L^2(\mu)$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_X fg\, d\mu$ est un espace de Hilbert.*