Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2019-2020
Compléments d'analyse

Feuille 2.5 : Contre-exemples en calcul différentiel

Exercice 1 (Fonction non différentiable admettant des dérivées directionnelles)
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x \text{ si } y = 0 \\ 0 \text{ si } y \neq 0. \end{cases}$$

1. Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que f admet une dérivée directionnelle en $(0,0)$ dans la direction de v.
2. Supposons f différentiable en $(0,0)$. Donner sa matrice jacobienne en $(0,0)$, puis calculer $Df(0,0)(1,1)$ de deux manères différentes. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2 (Fonction admettant des dérivées partielles, mais pas des dérivées dans toutes les directions)
Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.
2. Montrer que f n'admet pas de dérivée directionnelle en $(0,0)$ dans la direction de $(1,1)$.

Exercice 3 (Fonction différentiable dont les dérivées partielles ne sont pas continues)

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Justifier que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
2. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$, de différentielle nulle. En déduire $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
3. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
4. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$ ne sont pas continues de $(0,0)$.

Exercice 4 (Fonction admettant des dérivées partielles, mais pas différentiable)
Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.
2. Si f était différentiable, quelle serait sa différentielle ?
3. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.