Un ensemble Lebesgue-mesurable non borélien

Résumé

On a vu que la tribu de Lebesgue est la tribu complétée de celle de Borel pour la mesure de Borel ; autrement dit, on ajoute aux boréliens tous les ensembles négligeables, plus généralement, toutes les unions d'un borélien avec un négligeable. Le but de ce document est d'expliciter un élément de la tribu de Lebesgue qui n'est pas un borélien.

1 L'ensemble de Cantor

Construction : On obtient l'ensemble de Cantor en partant de l'intervalle $[0, 1]$ et en itérant l'opération "enlever le tiers du milieu" :

- A l'étape 1, on enlève à $[0, 1]$ l'intervalle $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Il nous reste $A_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.
- On enlève le tiers du milieu de chacun de ces sous-intervalles : on enlève $]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$ à $[0, \frac{1}{3}]$ et $]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$ à $[\frac{2}{3}, 1]$. Il nous reste $A_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$
- On itère ce procédé indéfiniment. L'ensemble de Cantor $\mathcal{C} = \bigcap_n A_n$ est "ce qui reste" après une infinité d'étapes.

FIGURE 1 – Etapes de la construction de l'ensemble de Cantor

Une autre façon d'aboutir à $\mathcal{C}$ est d'utiliser l'*écriture en base 3* des éléments de $[0, 1]$. On est plus habitué à les écrire en base 10 : c'est ce qu'on appelle le développement décimal de $x \in [0, 1]$, donné par

$$x = 0, d_1 d_2 d_3 \cdots = \sum_{k \geq 1} \frac{d_k}{10^k}$$

où les décimales d_k sont des entiers entre 0 et 9 [1]. Mais il existe d'autres façons d'écrire les nombres : en base 2, par exemple, on aura $x = \sum_{k \geq 1} \frac{b_k}{2^k}$ avec $b_k \in \{0, 1\}$. C'est ce que l'on appelle l'écriture binaire de x, particulièrement utile en informatique. Ici, nous allons utiliser l'écriture en base 3. Pour $x \in [0, 1]$, il existe des entiers $t_k \in \{0, 1, 2\}$ tels que

$$x = \sum_{k \geq 1} \frac{t_k}{3^k}$$

Par exemple, l'écriture en base 3 de 1 correspond à $t_k = 2$ pour tout k, puisque

$$\sum_{k \geq 1} \frac{2}{3^k} = 2 \sum_{k \geq 1} \frac{1}{3^k} = 2 \left(\sum_{k \geq 0} \frac{1}{3^k} - 1 \right) = 2 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - 1 \right) = 1$$

et l'écriture de $\frac{1}{3}$ est donnée soit par $t_1 = 1, t_k = 0 \, \forall k \geq 2$, soit par $t_1 = 0, t_k = 2 \, \forall k \geq 2$.

Avec ces notations, l'ensemble de Cantor peut être décrit comme l'ensemble des éléments de $[0, 1]$ dont une des écritures en base 3 ne comporte que des 0 et des 2.

1. Notons que cette écriture n'est pas unique : ainsi, 1=0.9999999....admet deux développements décimaux

En effet, à la première étape, on enlève tous les éléments entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$: ce sont ceux la première “décimale”[2] en base 3 vaut $t_1 = 1$. A l'étape 2, on enlève tous ceux qui vérifient $t_2 = 1$. Et ainsi de suite : à l'infini, il ne reste que les nombres dont l'écriture en base 3 ne comporte que des 0 et des 2. Plus formellement :

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in [0,1],\ x = \sum_{k \geq 1} \frac{t_k}{3^k},\ t_k \in \{0,2\} \right\}$$

Propriétés : L'ensemble de Cantor a la particularité d'être non dénombrable *et* de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$.

1. *Non-dénombrable :* On montre qu'il existe une bijection entre $\mathcal{C}$ et l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Elle est donnée par
$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) &\to \mathcal{C} \\ A &\mapsto \sum_{k \geq 1} \frac{2 \cdot \mathbb{1}_A(k)}{3^k} \end{aligned}$$
Le réel $f(A)$ est bien un élément de $\mathcal{C}$ puisque son écriture en base 3 ne comporte que des 0 et des 2. De plus, f est injective : si $f(A) = f(B)$, on obtient que pour tout k, $\mathbb{1}_A(k) = \mathbb{1}_B(k)$, donc $K \in A \Leftrightarrow \mathbb{1}_A(k) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{1}_B(k) = 1 \Leftrightarrow k \in B$, autrement dit, $A = B$. Enfin, f est surjective : pour tout $x = \sum_{k \geq 1} \frac{t_k}{3^k} \in \mathcal{C}$, $x = f(A)$ où
$$A = \{k \in \mathbb{N}^*, t_k = 2\}.$$
Or, un résultat classique de théorie des ensembles assure qu'il n'y a pas de bijection entre $\mathbb{N}^*$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ [3], donc il n'y a ps de bijection entre $\mathbb{N}^*$ et $\mathcal{C}$. Donc $\mathcal{C}$ n'est pas dénombrable.

2. *De mesure nulle :* Remarquons que pour tout n, $\lambda(A_{n+1}) = \frac{2}{3}\lambda(A_n)$, et $\lambda(A_0) = \lambda([0,1]) = 1$. Donc $\lambda(A_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Comme $\mathcal{C}$ est l'intersection décroissante des A_n, on a
$$\lambda(\mathcal{C}) = \lim_{n \to \infty} \lambda(A_n) = 0.$$

L'ensemble de Cantor est une curiosité mathématique, qui a d'autres propriétés intéressantes (topologiques, notamment) : c'est un compact d'intérieur vide, sans point isolé, et sa dimension de Hausdorff (qui sert à décrire les objets fractals) est $\log_3(2)$, soit à peu près 0.631. Mais c'est là une autre histoire, qui sera racontée une autre fois.

2 La fonction de Cantor

On va définir une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ comme suit. Soit $x \in [0,1]$, d'écriture en base 3 $x = \sum_{k \geq 1} \frac{t_k}{3^k}$. On pose $N = \min\{k \in \mathbb{N}, t_k = 1\}$ si x admet des 1 dans son écriture décimale, et $N = \infty$ sinon. On définit alors

$$b_n = \begin{cases} \frac{t_n}{2} \text{ si } n < N \\ 1 \text{ si } n = N \end{cases}$$

Chacun des b_n est égal à 0 ou 1 puisque $t_n = 0$ ou 2 pour tout $n < N$. On peut donc utiliser les b_n comme écriture binaire d'un élément de $[0,1]$, et on définit ainsi f par

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j}{2^j}$$

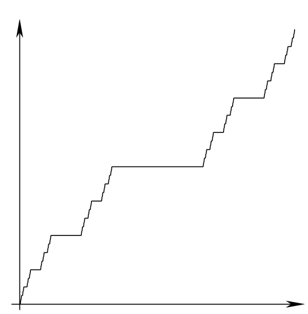

FIGURE 2 – La fonction de Cantor

2. ....tricimale ?
3. Et plus généralement, entre A et $\mathcal{P}(A)$, quel que soit l'ensemble A.

Remarquons que si l'écriture en base 3 de x comporte un premier 1 en position N, alors on "coupe" le développement binaire de $f(x)$ à N. Donc tous les x qui tels que $t_N = 1$ sont envoyés sur le même réel par f. Par exemple, si $x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ alors le développement en base 3 de x est $0,1t_2t_3\ldots_3$, donc $N = 1$ et $f(x) = \frac{1}{2}$. Donc f est constante égale à $\frac{1}{2}$ sur $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. On montre de même que f est constante sur chaque intervalle qu'on a enlevé pour construire $\mathcal{C}$.

Alors f est une fonction continue et croissante sur $[0,1]$, vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, et surjective de $\mathcal{C}$ sur $[0,1]$.

Preuve.

- f est continue : Soient $x_0 \in [0,1]$, $\varepsilon > 0$. L'idée est que pour δ assez petit, si $|x - x_0| < \delta$, alors les développements de x et de x_0 en base 3 seront les mêmes pour un grand nombre des premières "décimales". Plus précisément, choisissons N assez grand pour que $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$, et prenons $\delta = \frac{1}{3^{N+1}}$. Alors si $|x - x_0| < \delta$, les développements de $x = \sum_{k\geq 1} \frac{t_k}{3^k}$ et de $x_0 = \sum_{k\geq 1} \frac{c_k}{3^k}$ vérifient $t_n = c_n$ pour tout $n \leq N$. On en déduit, par construction de f, que si on note
$$f(x_0) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{2^j}, \quad f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{2^j}$$
les développements binaires de $f(x)$ et $f(x_0)$, alors $y_n = d_n$ pour tout $n \leq N$. Donc, dès que $|x - x_0| < \delta$,
$$|f(x) - f(x_0)| \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{|y_j - d_j|}{2^j} \leq \frac{1}{2^N} < \varepsilon;$$
autrement dit, f est continue en x_0. Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in [0,1]$, f est continue sur $[0,1]$.

- f est croissante : Si $x, y \in [0,1]$ vérifient $x < y$, alors les décimales de leur développement en base 3, que l'on note (x_n) et (y_n), doivent différer pour la première fois à un certain n_0 ; et on a alors $x_{n_0} < y_{n_0}$. Par définition de f, on aura la même comparaison dans les développements binaires de $f(x)$ et $f(y)$, donc $f(x) < f(y)$.

- $f : \mathcal{C} \to [0,1]$ est surjective : prenons $y \in [0,1]$, et écrivons son développement en base 2 :
$$y = \sum_{k\geq 1} \frac{y_k}{2^k}$$
Alors pour tout k, $y_k \in \{0,1\}$. Posons $x_k = 2y_k \in \{0,2\}$ et notons x l'élément de $[0,1]$ dont le développement en base 3 est donné par les x_k. Autrement dit
$$x = \sum_{k\geq 1} \frac{x_k}{3^k} = \sum_{k\geq 1} \frac{2y_k}{3^k}$$
Alors $x \in \mathcal{C}$ puisque son développement en base 3 ne comporte que des 0 et des 2. Donc, le développement en base 2 de $f(x)$ est donné par
$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j/2}{2^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{2^j} = y,$$
donc y a un antécédent dans $\mathcal{C}$ par f. Ceci étant vrai pour tout $y \in [0,1]$, $f : \mathcal{C} \to [0,1]$ est surjective. $\square$

3 Le contre-exemple : Un ensemble Lebesgue-mesurable non borélien

Les ensembles non-mesurables : ils sont partout ! Dans un épisode précédent, on a construit un ensemble $V \subset [-1,1]$ qui n'était pas mesurable par la mesure de Lebesgue (voir fiche "Ensembles non mesurables"). Pour cela, on avait considéré l'ensemble (dénombrable) des rationnels de $[-2,2]$, noté $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et montré que les $V_k = r_k + V$ étaient des sous ensembles disjoints de $[-3,3]$. On va utiliser le même procédé pour obtenir

Proposition 1. *Soit $E \subset V$ un ensemble mesurable. Alors $\lambda(E) = 0$.*

Preuve. Comme pour la preuve de l'existence de V, on définit, pour $k \in \mathbb{N}$, $E_k = r_k + E$. Puisque $E \subset V$ et que les $V_k = r_k + V$ sont disjoints, on en déduit que les E_k sont disjoints. De plus, puisque la mesure de Lebesgue est invariante par translation, on a pour tout k, $\lambda(E_k) = \lambda(E)$. Mais du coup

$$\lambda(\bigcup_k E_k) = \sum_k \lambda(E_k) = \sum_k \lambda(E) = \lambda(E) \sum_k 1 = \begin{cases} \infty \text{ si } \lambda(E) > 0 \\ 0 \text{ si } \lambda(E) = 0. \end{cases}$$

Mais puisque $\bigcup_k E_k \subset \bigcup V_k \subset [-3, 3]$, on a $\lambda(\bigcup_k E_k) \leq 6$, donc nécessairement $\lambda(E) = 0$. $\square$

En utilisant cela, on montre qu'en fait, il y a des sous-ensembles non mesurables cachés partout :

Proposition 2. *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(A) > 0$. Alors il existe un sous ensemble $E \subset A$ non mesurable.*

Preuve. Puisque $\lambda(A) > 0$, et puisque $\mathbb{R} = \cup[n, n+1[$, il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda(A \cap [n, n+1[) > 0$. Soit $B = (A \cap [n, n+1[) - n$: autrement dit, on décale $A \cap [n, n+1[$ de n vers la gauche. Ainsi, $B \subset [0, 1[$ et $\lambda(B) > 0$.

Considérons les ensembles V_k définis plus haut : ils ne sont pas mesurables. Posons pour chaque k $E_k = B \cap V_k$. Si tous les E_k sont mesurables, alors, puique $E_k - r_k \subset V$, on a donc $\lambda(E_k - r_k) = \lambda(E_k) = 0$ pour tout k, d'après la proposition précédente. Mais

$$\bigcup_k E_k = \bigcup_k (B \cap V_k) = B \cap \bigcup_k V_k = B \cap [0, 1] = B$$

donc

$$0 < \lambda(B) = \sum_k \lambda(E_k) = \sum_k 0 = 0,$$

ce qui est contradictoire. Il existe donc au moins un k tel que E_k n'est pas mesurable, et donc, comme $E_k \subset B$, $E_k + n \subset A$ est un sous-ensemble non mesurabmle de A. $\square$

Construction d'un ensemble Lebesgue-mesurable pas borélien Reprenons la fonction de Cantor f définie ci-dessus, et posons

$$\begin{aligned} g : [0, 1] &\to [0, 2] \\ x &\mapsto x + f(x) \end{aligned}$$

Alors g est continue, comme somme de deux fonctions continues sur $[0, 1]$ et strictement croissante, donc injective. De plus, $g(0) = 0, g(1) = 2$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires, g est surjective. C'est donc une bijection continue. Soit $h = g^{-1} : [0, 2] \to [0, 1]$ l'application réciproque. On a :

Lemme 3. *h est continue.*

Preuve. On va montrer que l'image réciproque d'un ouvert de $[0, 1]$ par h est un ouvert. Soit $U \subset [0, 1]$ un ouvert, alors $[0, 1] \setminus U$ est un fermé de $[0, 1]$, qui est compact : donc c'est un compact. Or l'image d'un compact par une application continue est un compatc, donc $g([0, 1] \setminus U)$ est un compact de $[0, 2]$. En particulier, c'est un fermé. Mais alors

$$[0, 2] \setminus h^{-1}(U) = h^{-1}([0, 1] \setminus U) = g([0, 1] \setminus U)$$

est fermé, donc $h^{-1}(U)$ est bien un ouvert de $[0, 2]$. $\square$

On a de plus

Lemme 4. *$g(\mathcal{C})$ est de mesure 1.*

Démonstration. Calculons la mesure du complémentaire de $g(\mathcal{C})$.

$$\lambda([0,2] \setminus g(\mathcal{C})) = \lambda([0,2] \setminus h^{-1}(\mathcal{C})) = \lambda(h^{-1}([0,1] \setminus \mathcal{C})) = \lambda(g([0,1] \setminus \mathcal{C}))$$

Or $[0,1] \setminus \mathcal{C}$ est une union dénombrable d'intervalles disjoints $I_k =]a_k, b_k[$ (les "tiers du milieu" enlevés à chaque étape de la construction de $\mathcal{C}$), donc

$$\lambda(g([0,1] \setminus \mathcal{C})) = \lambda(g(\bigcup_k I_k)) = \lambda(\bigcup_k g(I_k)) = \sum \lambda(g(I_k))$$

Or, puisque g est croissante continue, $g(I_k) =]g(a_k), g(b_k)[$ donc

$$\lambda(g(I_k)) = g(b_k) - g(a_k) = (b_k + f(b_k)) - (a_k + f(a_k)) = (b_k - a_k) + (f(b_k) - f(a_k)) = b_k - a_k,$$

puisque f est constante sur chaque I_k, donc $f(b_k) = f(a_k)$. On a donc $\lambda(g(I_k)) = \lambda(I_k)$, donc, en reprenant notre calcul,

$$\lambda([0,2] \setminus g(\mathcal{C})) = \sum_k \lambda(I_k) = 1,$$

puisque $\mathcal{C}$ est de mesure nulle, donc la mesure de son complémentaire dans $[0,1]$ est 1. Comme $[0,2]$ est l'union disjointe de $g(\mathcal{C})$ et de $[0,2] \setminus g(\mathcal{C})$, on a

$$\lambda(g(\mathcal{C})) = \lambda([0,2]) - \lambda([0,2] \setminus g(\mathcal{C})) = 1,$$

comme souhaité. $\square$

Puisque $\lambda(g(\mathcal{C})) > 0$, $g(\mathcal{C})$ contient un sous-ensemble non mesurable E. Soit $A = g^{-1}(E)$. Alors $A \subset \mathcal{C}$, donc A est un sous-ensemble d'un ensemble de mesure nulle : A est négligeable, donc Lebesgue-mesurable, puisque la mesure de Lebesgue est complète [4].

Or, si A était un borélien, puisque h est continue, donc borélienne, on aurait que $h^{-1}(A) = g(A) = E$ est aussi un borélien. Mais c'est impossible, puisque E n'est pas mesurable.

Ainsi, A est un élément de la tribu de Lebesgue qui n'est pas un borélien.

4. Voir la fiche "Borel vs Lebesgue : une clarification" pour plus de détails.