Base et dimension d'un sous-espace vectoriel

Q Comment déterminer une base d'un sous-espace vectoriel $F \subset E$, où E est un espace vectoriel de dimension finie ?

→ Deux cas se présentent en général.

1er cas Si F est défini par une ou plusieurs équations linéaires

ex $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z=0,\ 4x+3y-z=0\}$

Alors on commence par chercher une famille génératrice :
On prend $u \in F$ quelconque, et on va chercher à l'exprimer comme combinaison linéaire d'un petit nombre de vecteurs fixes de F.

⇝ Pour cela, on utilise la ou les équations :

ex Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, alors

$$u \in F \iff \begin{cases} x+y+z = 0 \\ 4x+3y-z = 0 \end{cases}$$

← les coordonnées de u sont solution d'un système linéaire

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1}{\iff} \begin{cases} x+y+z=0 \\ -y-5z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4z \\ y = -5z \end{cases}$$

on résoud le système

⇝ les équations nous permettent d'exprimer une partie des coordonnées de u en fonction des autres.

ex On a donc $u \in F \iff \exists z \in \mathbb{R},\ u = (4z, -5z, z)$

$$\iff \exists z \in \mathbb{R},\ u = z(4,-5,1)$$

$\Leftrightarrow u \in \mathrm{Vect}((4,-5,1))$

Donc $F = \mathrm{Vect}((4,-5,1))$

On trouve ainsi un nombre fini de vecteurs $u_1, \dots u_k$ tels que $\boxed{F = \mathrm{Vect}((u_1, \dots u_k))}$

$\rightarrow (u_1, \dots u_k)$ est donc une famille génératrice de F.

$\rightsquigarrow$ Pour montrer que c'est une base, reste à vérifier si elle est libre

- si oui, c'est une base de F, et $\boxed{\dim F = k}$
- si non, alors l'un des u_i est combinaison linéaire des autres : on l'enlève, et on a alors

$$F = \mathrm{Vect}((u_1, \dots u_{i-1}, u_{i+1} \dots u_k))$$

et on recommence : on vérifie si $(u_1, \dots u_{i-1}, u_{i+1}, \dots u_k)$ est libre.

ex Ici $F = \mathrm{Vect}((\underbrace{4,-5,1}_{u_1}))$ et $u_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, donc $\{u_1\}$ est libre

(Rappel une famille à 1 vecteur est libre ssi il est non nul)

$\rightarrow (u_1)$ est une base de F et $\dim F = 1$.

Exemple 2 $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x-y-z=0\}$

$u = (x,y,z) \in G \Leftrightarrow x - y - z = 0$ "système" à 1 équation

$\Leftrightarrow x = y + z$ inconnues libres

donc $u \in G \Leftrightarrow \exists y, z \in \mathbb{R}$ tq $u = (y+z, y, z)$

$\Leftrightarrow \exists y, z \in \mathbb{R}$ tq $u = y(1,1,0) + z(1,0,1)$

$\Leftrightarrow u \in \mathrm{Vect}((\underbrace{1,1,0}_{v_1}), (\underbrace{1,0,1}_{v_2}))$

Donc $\{v_1, v_2\}$ est une famille génératrice de G.

On vérifie que c'est une famille libre : c'est donc une base de G

$\rightarrow \boxed{\dim G = 2}$

$\underline{2^{\text{ème}}\text{ cas}}$ F est défini comme le sous espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs :

$$F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots u_k)$$

$\underline{\text{ex}}$ $F = \mathrm{Vect}\left(\underset{u_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}, \underset{u_3}{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}}\right) \subset \mathbb{R}^3$

$\leadsto$ Dans ce cas, par définition, $(u_1, \dots u_k)$ est une famille génératrice de F.

- si elle est libre, c'est une base de F et $\boxed{\dim F = k}$
- sinon, l'un des u_i, disons u_k, est combinaison linéaire des autres. On peut l'enlever :

$$F = \underbrace{\mathrm{Vect}(u_1, \dots u_{k-1})}_{\text{famille génératrice de } F}$$

et on recommence : si $(u_1, \dots u_{k-1})$ est libre, c'est une base, sinon on enlève un vecteur qui s'exprime comme combinaison linéaire des autres, etc

$\underline{\text{ex}}$ Vérifions si (u_1, u_2, u_3) est libre : soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Alors

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \end{cases}$$

$\rightarrow$ Ce système admet une infinité de solutions : $\mathcal{S} = \{(-\lambda_3, -\lambda_3, \lambda_3), \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$

Par ex, $(-1, -1, 1)$ est solution non nulle : la famille n'est pas libre, et $-u_1 - u_2 + u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$, càd $\underline{u_3 = u_1 + u_2}$

$\rightarrow$ On "enlève" u_3 : $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.

On vérifie que (u_1, u_2) est libre : c'est une base de F
et $\dim F = 2$.