

# Mesure de Lebesgue - Ensembles non mesurables

Rappelons qu'on a le résultat suivant :

**Théorème 1.** *Il n'existe aucune application  $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$  telle que*

1.  $\mu(I) = \ell(I)$  pour tout intervalle ouvert  $I$  ;
2. Pour toute famille dénombrable d'ensembles disjoints  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $\mu(\bigcup_k A_k) = \sum_k \mu(A_k)$  ;
3. Pour tout  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mu(A + t) = \mu(A)$ .

C'est ce qui nous pousse à définir la mesure de Lebesgue  $\lambda$ , non pas sur  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  tout entier, mais sur l'ensemble des boréliens  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $\lambda$  vérifie bien les trois propriétés ci-dessus.

Il doit donc y avoir des parties de  $\mathbb{R}$  qui ne sont pas des boréliens, et auxquelles on ne peut pas étendre la mesure de Lebesgue...mais pour les trouver, il faut se lever de bonne heure.

**Construction du contre-exemple :** A chaque  $a \in [-1, 1]$ , on associe l'ensemble :

$$C_a = \{x \in [-1, 1], x - a \in \mathbb{Q}\}$$

Remarquons que  $a \in C_a$  puisque  $a - a = 0 \in \mathbb{Q}$ .

Les  $C_a$  vérifient les propriétés suivantes :

1. Pour tout  $a \in [-1, 1]$ ,  $C_a \subset [-1, 1]$  donc  $\bigcup_{a \in [-1, 1]} C_a \subset [-1, 1]$ . Réciproquement, si  $a \in [-1, 1]$ ,  $a \in C_a \subset \bigcup_{a \in [-1, 1]} C_a$ , donc  $[-1, 1] \subset \bigcup_{a \in [-1, 1]} C_a$ . Donc,  $[-1, 1] = \bigcup_{a \in [-1, 1]} C_a$ .
2. Les  $C_a$  sont soit disjoints, soient confondus. En effet, supposons qu'il existe  $x \in C_a \cap C_b$  (autrement,  $C_a \cap C_b = \emptyset$ ) et montrons qu'alors  $C_a = C_b$ . On a

$$\begin{cases} x - a \in \mathbb{Q} \\ x - b \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Soit  $y \in C_a$ . Alors  $y - a \in \mathbb{Q}$ . D'autre part,  $y - b = (y - a) + (a - x) + (x - b)$  est la somme de trois rationnels, donc  $y - b \in \mathbb{Q}$ . Ainsi,  $y \in C_b$ . On montre de même que  $C_b \subset C_a$ , donc  $C_a = C_b$ .

3. Ainsi, (en ignorant ceux qui apparaissent en double), les  $C_a$  forment une partition de  $[-1, 1]$ .

Prenons un élément de chaque  $C_a$  (après avoir éliminé les doublons) et mettons-les tous dans un ensemble  $V \subset [-1, 1]$ . (Pour ceux qui savent, cette opération apparemment innocente fait intervenir l'axiome du choix, un axiome assez controversé de la théorie des ensembles). Il va s'agir de montrer qu'on ne peut pas mesurer  $V$ .

Considérons maintenant  $\mathbb{Q} \cap [-2, 2]$  l'ensemble des rationnels entre -2 et 2. C'est un ensemble dénombrable, donc on peut l'écrire sous forme de suite  $r_0, r_1, r_2 \dots = (r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ , on considère  $r_k + V = \{y \in \mathbb{R}, y = r_k + x \text{ pour un } x \in V\}$ . Alors, puisque la mesure de Lebesgue est invariante par translation (propriété 3 dans le Théorème 1), si on peut mesurer  $V$ , on doit avoir  $\lambda(r_k + V) = \lambda(V)$  pour tout  $k$ .

Par ailleurs, remarquons que les  $r_k + V$  sont tous disjoints. En effet, si  $x \in (r_k + V) \cap (r_j + V)$  alors  $x = r_k + v_1 = r_j + v_2$  donc  $v_1 - v_2 = r_j - r_k \in \mathbb{Q}$ , donc  $v_1 \in C_{v_2}$ . Mais  $v_2 \in C_{v_2}$ , or  $V$  ne contient qu'un élément de chaque classe  $C_a$ . On a donc forcément  $v_1 = v_2$ , donc  $r_j = r_k$ . Par contraposée, dès que  $r_j \neq r_k$ ,  $(r_k + V) \cap (r_j + V) = \emptyset$ . Donc, d'après la propriété d'additivité (propriété 2 dans le Théorème 1),

$$\lambda\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (r_k + V)\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(r_k + V) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(V).$$

Il y a donc deux cas de figure : soit  $\lambda(V) = 0$ , et alors  $\lambda\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}}(r_k + V)\right) = 0$ , soit  $\lambda(V) > 0$ , et alors  $\lambda\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}}(r_k + V)\right) = \infty$ .

Mais aucun de ces deux cas n'est possible, comme on va le voir.

D'abord, remarquons que si  $x \in [-1, 1]$ , alors il existe  $v \in V$  tel que  $v \in C_x$  (puisque  $V$  contient un élément de chaque classe  $C_a$ ). Donc il existe  $q \in \mathbb{Q}$  tel que  $v - x = q$ . De plus, comme  $x \in [-1, 1]$  et  $v \in [-1, 1]$ , on a aussi  $q \in [-2, 2]$ . On en déduit que  $-q$  est aussi un rationnel dans  $[-2, 2]$ , donc  $-q$  est l'un des  $r_k$ . Donc  $x = -q + v = r_k + v \in r_k + V$ .

On en déduit que  $[-1, 1] \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}}(r_k + V)$ . Donc

$$\lambda\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}}(r_k + V)\right) \geq \lambda([-1, 1]) = 2.$$

On ne peut donc pas avoir  $\lambda(V) = 0$ .

Par ailleurs, pour tout  $k$ ,  $r_k + V \subset [-3, 3]$  (car  $r_k \in [-2, 2]$  et  $V \subset [-1, 1]$ ) donc  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}}(r_k + V) \subset [-3, 3]$ . Donc

$$\lambda\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}}(r_k + V)\right) \leq \lambda([-3, 3]) = 6.$$

On ne peut donc pas avoir  $\lambda(V) > 0$ .

Il n'y a donc aucune possibilité raisonnable pour mesurer  $V$  : donc ce n'est pas un borélien (ni même un élément de la tribu "complétée" de Lebesgue).

**Preuve du théorème 1** Supposons maintenant qu'une telle application  $\mu$  existe. Alors, en reprenant le contre exemple ci-dessus, on conclut que  $\mu(V)$  ne peut pas être bien défini non plus. En effet, pour aboutir à une contradiction, on n'a utilisé que le fait que  $\lambda$  vérifie les propriétés 1,2 et 3 du théorème; donc toute application qui vérifie ces propriétés se cassera les dents sur le même contre-exemple.