Lebesgue vs Riemann: Une comparaison

Résumé

Même si elles ne sont pas totalement sans rapport, la construction de l'intégrale via la théorie de la mesure est assez différente de la construction, peut-être plus "intuitive" de l'intégrale de Riemann d'une fonction bornée. Ce document vise à comparer les deux : pourquoi Lebesgue généralise bel et bien Riemann, qu'est-ce qui fait que Lebesgue marche "mieux", et quel est le lien avec l'aire sous la courbe.

1 Quelques rappels d'intégration de Riemann

Revenons pour un moment dans un monde pré-Lebesgue. On y dispose de l'intégrale de Riemann, définie comme suit. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée dont on souhaite connaître l'aire sous la courbe. On considère une subdivision $\sigma = (a = t_0 < x_1 < \cdots < t_n = b)$ de l'intervalle $[a,b]$ en sous-intervalles $[t_i, t_{i+1}]$, et, sur chaque sous intervalle, on approche f par une fonction constante.

On peut choisir $\sup_{[t_i,t_{i+1}]} f$: on approche f par la fonction en escalier $h_\sigma^+ = \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{[t_i,t_{i+1}]} f \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}[}$.

Ou on prend $\inf_{[t_i,t_{i+1}]} f$: on approche f par la fonction en escalier $h_\sigma^- = \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{[t_i,t_{i+1}]} f \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}[}$.

Alors l'aire sous la courbe de ces fonctions en escalier est facile à calculer : c'est un paquet de rectangles. On obtient ainsi

$$I^+(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \sup_{[t_i,t_{i+1}]} f, \quad I^-(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \inf_{[t_i,t_{i+1}]} f$$

où $I^+(f,\sigma)$ est légèrement plus grande que l'aire sous la courbe de f et $I^-(f,\sigma)$ est légèrement plus petite. Si on prend des subdivisions de plus en plus fines (et que f n'est pas trop méchante), on devrait approcher de mieux en mieux l'aire sous la courbe de f. Plus rigoureusement, on définit donc

$$I^+(f) = \inf\{I^+(f,\sigma) \,|\, \sigma \text{ subdivision de } [a,b]\},\ I^-(f) = \sup\{I^-(f,\sigma) \,|\, \sigma \text{ subdivision de } [a,b]\}$$

et ont dit que f est intégrable si $I^+(f) = I^-(f)$. Dans ce cas, on appelle cette quantité intégrale de f, notée $\int_a^b f(t)dt$. Les fonctions intégrables incluent les fonctions continues, les fonctions monotones, et bien sûr les fonctions en escaliers. Celles-ci vérifient

$$\int_a^b h(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (t_{i+1} - t_i), \text{ pour } h = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}[}.$$

Rappelons qu'on a le critère d'intégrabilité suivant, obtenu en utilisant les définitions de sup et inf :

Proposition 1. *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée est intégrable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision σ_ε telle que $I^+(f,\sigma_\varepsilon) - I^-(f,\sigma_\varepsilon) < \varepsilon$.*

De manière équivalente, f est Riemann-intégrable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escaliers h_ε^+ et h_ε^- telles que $h_\varepsilon^- \leq f \leq h_\varepsilon^+$ et telles que

$$\int_a^b h_\varepsilon^+(t)dt - \int_a^b h_\varepsilon^-(t)dt < \varepsilon$$

2 Comparaison des intégrales de Lebesgue et de Riemann

Une intuition : Comme on l'a vu ci-dessus, on arrive à l'intégrale de Riemann en approchant l'aire sous la courbe de f par des rectangles obtenus en découpant l'intervalle de définition de f en sous-intervalles. On peut par exemple approcher f par la suite croissante de fonctions en escaliers h_n associée à la subdivision régulière σ_n de $[a,b]$ en 2^n sous-intervalles de même taille, donnée par $t_i = a + i\frac{b-a}{2^n}$. Ainsi

$$h_n = \sum \inf_{[t_i,t_{i+1}]} f\, \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}[}$$

(en bleu ci-dessous).

En revanche, l'intégrale de Lebesgue peut se calculer en approchant une fonction mesurable f par une suite croissante de fonctions *étagées* $(e_n)_n$ données, pour $n \in \mathbb{N}$, par

$$\begin{aligned} e_n(x) &= n\mathbb{1}_{\{f(x)\geq n\}} + \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n}\mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n}\leq f(x)\leq \frac{k+1}{2^n}\}} \\ &= \begin{cases} \frac{k}{2^n} \text{ si } \frac{k}{2^n} \leq f(x) \leq \frac{k+1}{2^n} \text{ pour } k \leq n2^n \\ n \text{ si } f(x) \geq n \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui revient à découper non pas l'ensemble de définition de f, mais *l'image* de f en petits sous-intervalles (en rouge ci-dessous).

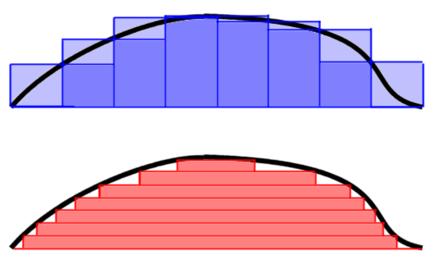

FIGURE 1 – Intégration de Riemann et de Lebesgue

Et ça donne la même chose ? Il se trouve que oui ! Les deux résultats suivants permettent de passer d'une intégrale à l'autre :

Théorème. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable. Alors f est mesurable pour la tribu de Lebesgue sur $[a,b]$, f est Lebesgue-intégrable et*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{[a,b]} f d\lambda$$

où l'intégrale à gauche est au sens de Riemann.

Preuve. Soit donc $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe deux fonctions en escaliers h_n^+ et h_n^- telles que $h_n^- \leq f \leq h_n^+$ et telles que

$$\int_a^b h_n^+(t)dt - \int_a^b h_n^-(t)dt < \frac{1}{2^n}$$

Pour tout n, il existe une subdivision $\sigma_n = (a = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_m^n = b)$ telle que $h_n^+ = \sum \alpha_i \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}[}$ et $h_n^- = \sum \beta_i \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}[}$. Puisque les intervalles sont des boréliens, h_n^+ et h_n^- sont mesurables, intégrables, et on a

$$\int_a^b h_n^+(t)dt = \sum \alpha_i(t_{i+1} - t_i) = \int_{[a,b]} h_n^+ d\lambda$$
$$\int_a^b h_n^-(t)dt = \sum \beta_i(t_{i+1} - t_i) = \int_{[a,b]} h_n^- d\lambda.$$

De plus, $\sum_n \int_{[a,b]}(h_n^+ - h_n^-)d\lambda < \infty$. Or, par le théorème de convergence monotone, on peut intervertir les signes somme et intégrale ici [1], donc $\int_{[a,b]}\sum_n(h_n^+ - h_n^-)d\lambda < \infty$, ce qui implique $\sum_n(h_n^+(x) - h_n^-(x)) < \infty$ pour presque tout x. Soit $E = \{x \in [a,b], (h_n^+(x) - h_n^-(x)) < \infty\}$; alors $\mu([a,b]\setminus E) = 0$ et pour tout x dans E, on a donc $h_n^+(x) - h_n^-(x) \to 0$, donc, puisque $h_n^- \leq f \leq h_n^+$, $h_n^+(x), h_n^-(x) \to f(x)$ pour tout $x \in E$.

On en déduit que f est mesurable sur la tribu de Lebesgue. En effet, $f\mathbb{1}_E$ est borélienne comme limite de fonctions borélienne, et, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(]a,\infty[) = \{x \in E, f(x) > a\} \cup \{x \in E^c, f(x) > a\} = \{x \in E, \mathbb{1}_E(x)f(x) > a\} \cup \{x \in E^c, f(x) > a\}$$

donc $f^{-1}(]a,\infty[)$ est l'union d'un ensemble borélien (puisque $f\mathbb{1}_E$ est borélienne) et d'un ensemble négligeable (sous ensemble de E^c), donc $f^{-1}(]a,\infty[)$ est dans la tribu de Lebesgue.

Par ailleurs, f est Riemann-intégrable, donc bornée, donc $|f| \leq M$ pour un $M > 0$. De plus, à partir d'un certain rang, $|h_n^- - f| \leq 1$, donc $|h_n^-| \leq 1 + M$ sur E, et $1 + M$ est intégrable sur $[a,b]$ (autrement dit, $(M+1)\mathbb{1}_{[a,b]}$ est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$). Par le théorème de convergence dominée, on a donc

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} h_n^- d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_a^b h_n^-(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

comme attendu. □

Via la théorie de Lebesgue, on obtient aussi un critère nécessaire et suffisant d'intégrabilité au sens de Riemann :

Théorème. *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si, et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *f est bornée et nulle en dehors d'un intervalle borné*
2. *l'ensemble des points de discontinuité de f est négligeable (autrement dit, contenu dans un borélien de mesure nulle)*

Preuve. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons dans un premier temps f Riemann-intégrable. Par définition de l'intégrale de Riemann, f est donc définie sur un intervalle borné $[a,b]$ et est bornée sur cet intervalle.

En reprenant la preuve du théorème précédent, on note :

$$\begin{cases} h_n = h_n^- \text{ une suite de fonctions en escaliers qui tend vers } f\ \lambda\text{-pp} \\ \varphi_n = h_n^+ - h_n^- \text{ une suite de fonctions en escaliers positives et telles que } \int_a^b \varphi_n(x)dx \leq \frac{1}{2^n} \end{cases}$$

Pour tout entier n, posons

$$A_n = \{x \in [a,b] \mid h_n \text{ ou } \varphi_n \text{ discontinue en } x\}$$

Alors A_n est un ensemble fini : ce sont mes points des subdivisions de l'intervalle $[a,b]$ associées aux fonctions en escaliers h_n et φ_n. On a donc $\lambda(A_n) = 0$ pour tout n. En posant $A = \bigcup_n A_n$, on obtient aussi $\lambda(A) = 0$. Posons aussi

$$B = \{x \in [a,b] \mid \varphi_n \nrightarrow 0\}.$$

On a vu, dans la preuve du théorème précédent, que $\lambda(B) = 0$.

Montrons que f est continue sur $A^c \cap B^c$. Soit $x_0 \in A^c \cap B^c$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \notin A_n$ donc h_n et φ_n sont continues en x_0. Comme ce sont des fonctions en escaliers, ceci signifie qu'il existe $\delta_n > 0$ tel que h_n et φ_n sont constantes sur $]x_0 - \delta_n, x_0 + \delta_n[$. Donc, pour x dans cet intervalle, on a $h_n(x) = h_n(x_0)$, $\varphi_n(x) = \varphi_n(x_0)$ donc

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - h_n(x)| + |h_n(x) - h_n(x_0)| + |h_n(x_0) - f(x_0)| \\ &= |f(x) - h_n(x)| + |h_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \varphi_n(x) + \varphi_n(x_0) = 2\varphi_n(x_0). \end{aligned}$$

1. Pourquoi, exactement ?

Or, puisque $x_0 \in B^c$, $\varphi_n(x_0) \to 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc n_0 tel que $2\varphi_n(x_0) < \varepsilon$ dès que $n \geq n_0$. Donc, pour $\delta = \delta_{n_0}$, on a obtenu

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq 2\varphi_{n_0}(x_0) < \varepsilon,$$

autrement dit, f est continue en x_0. L'ensemble des points de discontinuité de f est donc contenu dans $A \cup B$, qui est de mesure nulle.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que f vérifie les deux conditions et montrons qu'elle est Riemann-intégrable. En particulier, puisque f vérifie 1., il existe un intervalle borné $[-R, R]$ et $M > 0$ tels que $f \leq M\mathbb{1}_{[-R,R]}$.

Pour tout entier n, on considère la subdivision σ_n de $[-R, R]$ en 2^n sous-intervalles ouverts I_k^n, $0 \leq k \leq 2^{k-1}$, de longueur $\frac{2R}{2^n}$. On associe à σ_n les deux fonctions en escaliers suivantes :

$$f_n^-(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin [-R, R] \\ -M \text{ si } x \in \sigma_n \\ \inf_{I_k^n} f \text{ si } x \in I_k \end{cases} \qquad f_n^+(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin [-R, R] \\ M \text{ si } x \in \sigma_n \\ \sup_{I_k^n} f \text{ si } x \in I_k \end{cases}$$

Alors $f_n^- \leq f \leq f_n^+$. De plus, l'ensemble des points de chaque subdivision σ_n est fini, donc de mesure nulle. Posons $A = \cup_n \sigma_n$. Alors $\lambda(A) = 0$. Posons aussi D l'ensemble des points de discontinuité de f. Alors par la condition 2, $\lambda(D) = 0$. Soit $x_0 \in A^c \cap D^c$, on va montrer que $f_n^+(x_0) - f_n^-(x_0) \to 0$. C'est immédiat si $x_0 \notin [-R, R]$. Sinon, comme $x_0 \notin A$, x_0 est dans l'un des intervalles ouverts I_k^n, pour chaque n.

$$\begin{aligned} f_n^+(x_0) - f_n^-(x_0) &= \sup_{I_k^n} f - \inf_{I_k^n} f = \sup_{I_k^n} f - f(x_0) + f(x_0) - \inf_{I_k^n} f \\ &\leq 2 \sup_{y \in I_k^n} |f(y) - f(x_0)| \end{aligned}$$

Or, $x_0 \notin D$, donc f est continue en x_0, donc, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout y vérifiant $|x_0 - y| < \delta$, on a $|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$. Or, les intervalles I_k^n sont de longueur $\frac{R}{2^{n-1}}$. Pour n assez grand, si $y \in I_n^k$ alors $|y - x_0| < \delta$. Donc, pour n assez grand, $f_n^+(x_0) - f_n^-(x_0) < \varepsilon$, autrement dit $f_n^+(x_0) - f_n^-(x_0) \to 0$. Puisque $A \cup D$ est de mesure nulle, ceci est vrai λ-p.p. De plus, $f_n^+ - f_n^-$ est majorée par la fonction intégrable $2M\mathbb{1}_{[-R,R]}$ donc, par le théorème de convergence dominée,

$$\int_{[a,b]} (f_n^+ - f_n^-) d\lambda = \int_a^b (f_n^+(x) - f_n^-(x)) dx \to 0,$$

ce qui, d'après le critère d'intégrabilité au sens de Riemann ci-dessus, implique que f est Riemann-intégrable. $\square$

Intégrales impropres : En utilisant ce résultat, on peut aussi démontrer que l'intégrale de Lebesgue généralise aussi les intégrales impropres, par exemple sur $[a, +\infty[$. Rappelons un peu de vocabulaire :

- Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$. On dit que f est *localement intégrable* sur $[a, +\infty[$ si, pour tout $c > a$, f est Riemann-intégrable sur $[a, c]$.
- Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable. On peut donc calculer, pour tout $c > a$, $\int_a^c f(t)dt$ (avec l'intégrale de Riemann). On dit que l'intégrale impropre $\int_a^\infty f(t)dt$ *converge* si $\int_a^c f(t)dt$ admet une limite quand $c \to +\infty$. Cette limite est alors la valeur de l'intégrale $\int_a^\infty f(t)dt$.
- Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable. On dit que l'intégrale impropre $\int_a^\infty f(t)dt$ *converge absolument* si l'intégrale impropre $\int_a^\infty |f(t)|dt$ converge.

- Si l'intégrale impropre de f converge, mais ne converge pas absolument, on dit qu'elle est *semi-convergente.*

On a le résultat suivant, qui fait le lien entre les intégrales impropres absolument convergentes et l'intégrale de Lebesgue :

Théorème. *Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable donc l'intégrale impropre $\int_a^\infty f(t)dt$ converge absolument. Alors f est Lebesgue-intégrable sur $[a,\infty[$ et*

$$\int_a^\infty f(t)dt = \int_{[a,\infty[} f d\lambda$$

Preuve. D'après le théorème précédent, puisque f est Riemann-intégrable sur $[a,c]$, pour tout $c > a$, $f_{|[a,c]}$ est intégrable au sens de Lebesgue pour tout c (et en particulier, mesurable).

Montrons dans un premier temps que $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ est mesurable. On va utiliser le fait qu'on peut écrire $[a,\infty[$ comme union croissante d'intervalles bornés, sur lesquels f est mesurable : $[a,\infty[= \bigcup_n [a,a+n]$. Soit alors B un borélien de $\mathbb{R}$; on a

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= f^{-1}(B) \cap (\bigcup_n [a,a+n]) = \bigcup_n (f^{-1}(B) \cap [a,a+n]) \\ &= \bigcup_n \{x \in [a,a+n], f(x) \in B\} = \bigcup_n f^{-1}_{|[a,a+n]}(B) \end{aligned}$$

Or $f_{|[a,a+n]}$ est mesurable, donc $f^{-1}_{|[a,a+n]}(B)$ dans la tribu de Lebesgue de $[a,a+n]$. On peut montrer que c'est donc un élément de la tribu de Lebesgue de $[a,\infty[$. Ceci étant vrai pour tout borélien de $\mathbb{R}$, on a bien montré que f était mesurable.

Montrons maintenant que f est intégrable. Puisque $|f|$ est Riemann-intégrable sur $[a,a+n]$, le théorème précédent montre que $|f| \in \mathcal{L}^1([a,a+n]]$, autrement dit que $|f|\mathbb{1}_{[a,a+n]}$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[a,\infty[$, et de plus, on a

$$\int_{[a,\infty[} |f|\mathbb{1}_{[a,a+n]} d\lambda = \int_{[a,a+n]} |f| d\lambda = \int_a^{a+n} |f(t)|dt$$

où la dernière intégrale est au sens de Riemann. Puisque l'intégrale impropre de f est absolument convergente, on a

$$\int_a^{a+n} |f(t)|dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^\infty |f(t)|dt.$$

Par ailleurs, la suite de fonctions positives $|f|\mathbb{1}_{[a,a+n]}$ est croissante, avec $\lim_{n\to\infty} |f(x)|\mathbb{1}_{[a,a+n]}(x) = f(x)$ sur $[a,\infty[$. Par le théorème de convergence monotone, on a donc

$$\begin{aligned} \int_{[a\infty[} |f| d\lambda &= \int_{[a\infty[} \lim_{n\to\infty} |f|\mathbb{1}_{[a,a+n]} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a\infty[} |f|\mathbb{1}_{[a,a+n]} d\lambda \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{[a,a+n]} |f| d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_a^{a+n} |f(t)|dt \\ &= \int_a^\infty |f(t)|dt < \infty \end{aligned}$$

Ainsi, $|f|$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[a,\infty[$,donc f est également intégrable. De plus, la suite de fonctions $f_n = f\mathbb{1}_{[a,a+n]}$ converge simplement vers f sur $[a,\infty[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| = |f|\mathbb{1}_{[a,a+n]} \leq |f|$. Comme $|f|$ est intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée, ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_{[a\infty[} f d\lambda &= \int_{[a\infty[} \lim_{n\to\infty} f\mathbb{1}_{[a,a+n]} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a\infty[} f\mathbb{1}_{[a,a+n]} d\lambda \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{[a,a+n]} f d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_a^{a+n} f(t)dt \\ &= \int_a^\infty f(t)dt \end{aligned}$$

comme souhaité. $\square$

Remarque : Ce résultat ne s'applique pas pour les intégrales semi-convergentes. Par exemple, prenons $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$. Alors

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt = \infty,$$

et cette fonction n'est pas intégrable au sens de Lebesgue sur $]0,\infty[$: les intégrales de f^+ et f^- donnent toutes les deux $+\infty$, donc on ne peut pas les soustraire.

On ne peut donc pas définir l'intégrale de Lebesgue $\int_{]0,\infty[} \frac{\sin(t)}{t} d\lambda(t)$. Pourtant, on peut montrer que, pour tout $b > 0$, f est intégrable sur $]0,b]$ et

$$\int_{]0,b]} \frac{\sin(t)}{t} d\lambda(t) = \int_0^b \frac{\sin(t)}{t} dt \xrightarrow[b\to\infty]{} \frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt,$$

où la dernière intégrale est définie au sens des intégrales impropres.

3 Intégrale de Lebesgue et aire sous la courbe

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré [2], et $f : X \to [0,\infty[$ une fonction mesurable positive. On considère la région "sous la courbe" de f :

$$\mathcal{A}_f = \{(x,t) \in X \times]0,\infty[, 0 < t < f(x)\}$$

Alors on a :

Proposition 5. *Supposons que $(X, \mathcal{T}, \mu)$ soit σ-fini. On munit $]0,\infty[$ de la tribu des boréliens $\mathcal{B}$ et de la mesure de Lebesgue λ. Alors $\mathcal{A}_f$ est un élément de la tribu produit $\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}$ et*

$$(\mu \times \lambda)(\mathcal{A}_f) = \int_X^* f d\mu.$$

Preuve. Considérons la fonction $F : X \times]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto t - f(x)$. Alors F est mesurable, donc $\mathcal{A}_f = F^{-1}(]-\infty, 0[) \cap \{(x,t), t > 0\}$ est aussi mesurable. De plus, on a, par Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}(\mu \times \lambda)(\mathcal{A}_f) &= \int_{X\times]0,\infty[} \mathbb{1}_{\mathcal{A}_f} d(\lambda \times \mu) \\ &= \int_X \left(\int_{]0,\infty[} \mathbb{1}_{\mathcal{A}_f}(x,t) d\lambda(t) \right) d\mu(x) = \int_X \left(\int_{]0,f(x)[} 1 d\lambda(t) \right) d\mu(x) \\ &= \int_X f(x) d\mu(x).\end{aligned}$$

comme attendu. $\square$

2. Par exemple, un intervalle de $\mathbb{R}$ avec sa tribu des boréliens et la mesure de Lebesgue, mais cela marche aussi pour $X \subset \mathbb{R}^n$, etc.