Somme directe - Exemples

Exemple 1

$E = \mathbb{R}^3$. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z = 0\}$

$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z=0,\ x-y=0\}$

Montrons que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$

1) Méthode 1 ① Montrons que $F \cap G = \{(0,0,0)\}$

Soit $u = (x,y,z) \in F \cap G$. Alors

$$\begin{cases} z = 0 \\ x+y+z=0 \\ x-y=0 \end{cases} \text{ Donc } \begin{cases} z = 0 \\ x+y=0 \\ x=y \end{cases} \text{ Donc } \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Donc on a bien $u = (0,0,0)$.

② Montrons que $\mathbb{R}^3 = F + G$.

Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on cherche $v = (x',y',z') \in F$

$w = (x'',y'',z'') \in G$

tels que $u = v + w$.

Si v et w existent, voyons ce qu'ils doivent vérifier.

- $v \in F$ donc $z' = 0$: $v = (x', y', 0)$
- $w \in G$ donc $\begin{cases} x''+y''+z''=0 \\ x''-y''=0 \end{cases}$ Donc $\begin{cases} z'' = -2x'' \\ x'' = y'' \end{cases}$

  Donc $w = (x'', x'', -2x'')$
- Enfin, $u = v + w$ implique

$$\begin{cases} x = x''+x' \\ y = x''+y' \\ z = -2x'' \end{cases} \text{ Donc } \begin{cases} x' = x - x'' = x + \frac{z}{2} \\ y' = y - x'' = y + \frac{z}{2} \\ x'' = -\frac{z}{2} \end{cases}$$

Donc si v et w existent, alors

$v = \left(x + \frac{z}{2},\ y + \frac{z}{2},\ 0\right)$ et $w = \left(-\frac{z}{2},\ -\frac{z}{2},\ z\right)$

Posons donc $v = \left(x + \frac{z}{2}, y + \frac{z}{2}, 0\right)$
$w = \left(-\frac{z}{2}, -\frac{z}{2}, z\right)$

et vérifions qu'ils vérifient les 3 conditions $\begin{cases} v \in F \\ w \in G \\ u = v + w \end{cases}$

- On a bien $v \in F$
- $\begin{cases} \left(-\frac{z}{2}\right) + \left(-\frac{z}{2}\right) + z = 0 \\ \left(-\frac{z}{2}\right) - \left(-\frac{z}{2}\right) = 0 \end{cases}$ donc $w \in G$
- $v + w = \left(x + \frac{z}{2} - \frac{z}{2}, y + \frac{z}{2} - \frac{z}{2}, 0 + z\right) = (x, y, z) = u$

Donc on a bien $\boxed{\mathbb{R}^3 = F + G}$

2) Méthode 2

- Cherchons une base de F. On a

$u = (x,y,z) \in F \iff z = 0 \iff u = (x,y,0)$
$\iff u = x(1,0,0) + y(0,1,0)$
$\iff u = \mathrm{Vect}((1,0,0), (0,1,0))$

Donc $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$ est une famille génératrice de F
De plus, comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, c'est une famille libre

$\boxed{\mathcal{B}_F = ((1,0,0), (0,1,0)) \text{ est une base de } F}$

- Cherchons une base de G. On a

$u = (x,y,z) \in G \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -2x \\ y = x \end{cases}$

$\iff u = (x, x, -2x) = x(1,1,-2)$
$\iff u \in \mathrm{Vect}(1,1,-2)$

Donc $\{(1,1,-2)\}$ engendre G. De plus, ce vecteur est non nul, c'est donc une famille libre : $\boxed{\mathcal{B}_G = ((1,1,-2)) \text{ est une base de } G}$

Exemple 2 $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$F = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ {}^tA = A\}$$
$$G = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ {}^tA = -A\}$$

Montrons que $E = F \oplus G$

1) Méthode 1

• Montrons que $F \cap G = \{0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\}$

Soit $A \in F \cap G$ alors $\begin{cases} {}^tA = A \\ {}^tA = -A \end{cases}$ donc $A = -A$

Donc $A = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

• Montrons que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = F + G$.

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On cherche B et C telles que $B \in F$, $C \in G$ et $A = B + C$

Si B et C existent, alors elles doivent vérifier

$\begin{cases} {}^tB = B \\ {}^tC = -C \\ A = B + C \end{cases}$ donc ${}^tA = {}^tB + {}^tC = B - C$ et $A = B + C$

donc $\begin{cases} {}^tA + A = 2B \\ A - {}^tA = 2C \end{cases}$ donc $\begin{cases} B = \dfrac{{}^tA + A}{2} \\ C = \dfrac{A - {}^tA}{2} \end{cases}$

~~Montrons q~~ Posons donc $B = \dfrac{{}^tA + A}{2}$, $C = \dfrac{A - {}^tA}{2}$ et montrons qu'elles vérifient les conditions

* On a ${}^tB = {}^t\left(\dfrac{{}^tA + A}{2}\right) = \dfrac{{}^t({}^tA) + {}^tA}{2} = \dfrac{A + {}^tA}{2} = B$

Donc $B \in F$

* On a ${}^tC = {}^t\left(\dfrac{A - {}^tA}{2}\right) = \dfrac{{}^tA - {}^t({}^tA)}{2} = \dfrac{{}^tA - A}{2} = -C$

Donc $C \in G$

• Montrons que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base de $\mathbb{R}^3$ ③

On a donc $\mathcal{B} = \left((1,0,0), (0,1,0), (1,1,-2) \right)$

C'est une famille à 3 vecteurs dans un e.v. de dimension 3 : il suffit donc de montrer qu'elle est libre

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ réels tels que

$$\lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(0,1,0) + \lambda_3(1,1,-2) = (0,0,0)$$

Alors $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_3 = 0 \end{cases}$ donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

⇝ la famille $\mathcal{B}$ est libre, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$

• Donc on a bien $\boxed{\mathbb{R}^3 = F \oplus G}$

3) Méthode 3

• On a montré avec la méthode 1 que $F \cap G = \{(0,0,0)\}$

• Montrons que $\dim F + \dim G = \dim E$

On a obtenu à la méthode 2 que

$*$ $\mathcal{B}_F = ((1,0,0),(0,1,0))$ est une base de F

donc $\boxed{\dim F = 2}$

$*$ $\mathcal{B}_G = ((1,1,-2))$ est une base de G

donc $\boxed{\dim G = 1}$

On a donc bien $\dim(F+G) = \underbrace{\dim F}_{=2} + \underbrace{\dim G}_{=1} - \underbrace{\dim(F \cap G)}_{=0}$

$= 3 = \dim \mathbb{R}^3$

Puisque $F+G$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$, on a donc $\mathbb{R}^3 = F+G$

• Donc on a bien $\boxed{\mathbb{R}^3 = F \oplus G}$

$*$ $B+C = \frac{{}^tA+A}{2} + \frac{A-{}^tA}{2} = \frac{2A}{2} = A$

Donc on a bien $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = F+G$

• Donc $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus G$.

2) Méthode 2

• Cherchons une base de F. On a

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F \iff {}^tA = A \iff \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\iff b = c$$

$$\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff A \in \mathrm{Vect}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{S_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{S_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{S_3}\Big)$$

Donc (S_1, S_2, S_3) engendre F

De plus, c'est une famille libre. En effet, soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tq $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

alors $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\rightarrow$ (S_1, S_2, S_3) est une base de F

• Cherchons une base de G

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \iff {}^tA = -A \iff \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ d = 0 \\ b = -c \end{cases} \iff A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff A \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Donc $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ engendre G. De plus, la matrice $\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}^{A_4}$ est non nulle, donc c'est une base de G.

- Montrons que (S_1, S_2, S_3, A_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Puisque c'est une famille à 4 vecteurs dans l'ev. $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 4, il suffit de montrer qu'elle est libre.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ tq $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 + \lambda_4 A_4 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

alors $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ie $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 + \lambda_4 \\ \lambda_2 - \lambda_4 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i.e. $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$

ce qui donne $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

Donc (S_1, S_2, S_3, A_4) est une famille libre à 4 éléments dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donc c'est une base.

- On a donc $\boxed{\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus G}$

3) Méthode 3

- On a montré à la méthode 1 que $F \cap G = \{0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\}$
- Montrons que $\dim F + \dim G = \dim E = 4$
  - $\times$ (S_1, S_2, S_3) est une base de F donc $\boxed{\dim F = 3}$
  - $\times$ (A_4) est une base de G donc $\boxed{\dim G = 1}$

On a donc bien $\dim F + \dim G = 4$, donc $F + G = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- On en déduit que $\boxed{E = F \oplus G}$