Limite supérieure, limite inférieure et valeurs d'adhérence

Proposition 1. Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle. Alors

$$\begin{cases} \overline{\lim}\, u_n = \max Adh_{\overline{\mathbb{R}}}((u_n)_n) \\ \underline{\lim}\, u_n = \min Adh_{\overline{\mathbb{R}}}((u_n)_n) \end{cases}$$

Preuve. Montrons que $\overline{\lim}\, u_n = \max Adh_{\overline{\mathbb{R}}}((u_n)_n)$ (l'autre se montre de la même manière). Il y a deux choses à démontrer :

1. $\overline{\lim}\, u_n \in Adh_{\overline{\mathbb{R}}}((u_n)_n)$.
2. $\overline{\lim}\, u_n$ est un majorant de $Adh_{\overline{\mathbb{R}}}((u_n)_n)$.

Pour montrer 1., il nous faut construire une sous-suite de $(u_n)_n$ qui tend vers $\overline{\lim}\, u_n$. On distingue deux cas :

- **Premier cas : $(u_n)_n$ est majorée.** Dans ce cas, $\overline{\lim}\, u_n \in \mathbb{R}$. Notons $\lambda = \overline{\lim}\, u_n$. On va consruire une sous-suite de $(u_n)_n$ qui converge vers λ. Plus précisément, on va définir une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

  $$\lambda - \frac{1}{n} \leq u_{\varphi(n)} \leq \lambda + \frac{1}{n}$$

  On procède par récurrence. On pose $\varphi(0) = 0$. Construisons $\varphi(1) > \varphi(0)$ de manière à avoir

  $$\lambda - 1 \leq u_{\varphi(1)} \leq \lambda + 1.$$

  Rappelons que $\lambda = \lim_{p\to\infty} s_p$ où, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $s_p = \sup\{u_k, k \geq p\}$. Il existe donc $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geq n_1$, $|s_p - \lambda| < \frac{1}{2}$. Choisissons $p = \max\{n_1, 1\}$. Alors

  $$\lambda - \frac{1}{2} < s_p < \lambda + \frac{1}{2}$$

  Par ailleurs, par définition de la borne supérieure, $s_p - \frac{1}{2}$ n'est pas un majorant de $\{u_k, k \geq p\}$. Il existe donc $\varphi(1) =\geq p$ tel que $u_{\varphi(1)} \geq s_p - \frac{1}{2}$, d'où

  $$\lambda - 1 \leq s_p - \frac{1}{2} \leq u_{\varphi(1)} \leq s_p \leq \lambda + \frac{1}{2} \leq \lambda + 1$$

  donc on a bien trouvé $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $\lambda - 1 \leq u_{\varphi(1)} \leq \lambda + 1$.

  Supposons qu'on a ainsi trouvé des entiers $\varphi(0) < \varphi(1) < \ldots < \varphi(n)$ tels que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

  $$\lambda - \frac{1}{k} \leq u_{\varphi(n)} \leq \lambda + \frac{1}{n}$$

  et construisons $\varphi(n+1)$. Puisque $\lambda = \lim_{p\to\infty} s_p$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geq N$, $|s_p - \lambda| < \frac{1}{2(n+1)}$. Ainsi, pour $p = \max(\varphi(n)+1, N)$, on a $|s_p - \lambda| < \frac{1}{2(n+1)}$.

D'autre part, par définition de la borne supérieure, $s_p - \frac{1}{2(n+1)}$ n'est pas un majorant de $\{u_k, k \geq p\}$, donc il existe un entier que l'on note $\varphi(n+1) \geq p$ tel que $u_{\varphi(n+1)} \geq s_p - \frac{1}{2(n+1)}$. Mais alors

$$\lambda - \frac{1}{n+1} = \lambda - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)} \leq s_p - \frac{1}{2(n+1)} \leq u_{\varphi(n+1)} \leq s_p \leq \lambda + \frac{1}{2(n+1)} \leq \lambda + \frac{1}{n+1}$$

donc on a bien trouvé un entier $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ tel que $|u_{\varphi(n+1)} - \lambda| < \frac{1}{n+1}$.

On ainsi construit, par récurrence, une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $|u_{\varphi(n)} - \lambda| \leq \frac{1}{n}$. Autrement dit, on a construit une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers $\lambda = \overline{\lim}\, u_n$, donc $\overline{\lim}\, u_n$ est bien une valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ dans le cas où $(u_n)_n$ est majorée.

- **Deuxième cas : $(u_n)_n$ n'est pas majorée.** Dans ce cas, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $s_p = \sup\{u_k, k \geq p\} = +\infty$ et $\overline{\lim}\, u_n = +\infty$. Construisons une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, telle que pour tout n, $u_{\varphi(n)} \geq n$.

  On pose $\varphi(0) = 0$. Supposons qu'on a construit $\varphi(0) < \varphi(1) < \ldots < \varphi(n)$ tels que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $u_{\varphi(k)} \geq k$ et construisons $\varphi(k+1)$. Puisque $s_{\varphi(n)+1} = \sup\{u_k, k \geq \varphi(n)+1\} = +\infty$, $n+1$ n'est pas un majorant de $\{u_k, k \geq \varphi(n)+1\}$, donc il existe un entier, noté (au hasard) $\varphi(n+1)$, tel que $\varphi(n+1) \geq \varphi(n) + 1 > \varphi(n)$ et tel que

  $$u_{\varphi(n+1)} \geq n+1,$$

  comme on le souhaitait. On a ainsi construit une sous-suite de $(u_n)_n$ qui tend vers $+\infty = \overline{\lim}\, u_n$, donc $\overline{\lim}\, u_n$ est bien une valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ dans ce cas.

Reste à montrer 2. Soit $\ell \in Adh_{\overline{\mathbb{R}}}((u_n)_n)$, montrons que $\ell \leq \overline{\lim}\, u_n$. Puisque ℓ est une valeur d'adhérence, il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ de $(u_n)_n$ qui converge vers ℓ. Mais alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$ (Exercice : montrer que si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors pour tout n, $\varphi(n) \geq n$), donc

$$u_{\varphi(n)} \leq \sup\{u_k, k \geq n\} = s_n$$

d'où, en prenant la limite quand $n \to +\infty$,

$$\ell \leq \overline{\lim}\, u_n$$

Ceci étant vrai pour toute valeur d'adhérence ℓ de $(u_n)_n$, on en déduit que $\overline{\lim}\, u_n$ est bien un majorant de $Adh_{\overline{\mathbb{R}}}((u_n)_n)$, ce qui démontre 2. $\square$