Bases et dimension

Familles libres, familles génératrices : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et $\mathcal{F} = \{u_1, \dots, u_k\}$ une famille de vecteurs de E.

1. La famille $\mathcal{F}$ est *libre* si pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = 0_E \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, k}$$

2. La famille $\mathcal{F}$ est *génératrice* si tout vecteur de E est combinaison linéaire des u_i :

$$\boxed{\forall\, x \in E, \exists \lambda_1 \dots, \lambda_k \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i}$$

Méthodes : Pour vérifier si une famille $\{u_1, \dots, u_k\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est...

- *libre :* On suppose que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = 0_{\mathbb{R}^n}$. Ceci donne un système linéaire homogène d'inconnues $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, que l'on résoud (par exemple avec le pivot de Gauss).
  - si $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ est la seule solution, la famille est libre.
  - Sinon, la famille n'est pas libre, et les solutions non nulles permettent d'exprimer certains des (u_i) comme combinaison linéaire des autres.
- *génératrice :* On prend un vecteur quelconque $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et on cherche $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$. Ceci se réécrit en un système linéaire d'inconnues $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ et de second membre $(x_1, \dots, x_n)$, que l'on résoud.
  - S'il y a au moins une solution, la famille est génératrice, et on a trouvé l'expression des λ_i en fonction des x_i.
  - Sinon, le système n'a pas de solution : dans ce cas, la famille n'est pas génératrice. De plus, le système comporte alors des lignes du type $0 = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$, qui donnent des équations de l'espace vectoriel engendré par les (u_i).

Bases : Une *base* de E est une famille à la fois libre et génératrice. Donc, si $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ est une base de E, pour chaque $x \in E$, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum \lambda_i u_i$. On appelle ce n-uplet *coordonnées* de x dans la base $\mathcal{B}$. dans la base

Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments ; on appelle ce nombre *dimension* de E. Sur un espace vectoriel de dimension n, on a plus précisément :

- les familles libres ont *au plus* n éléments
- les familles génératrices ont *au moins* n éléments
- les bases ont *exactement* n éléments.

Méthodes : Pour vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de E, on peut :

- Montrer que c'est une famille libre et génératrice
- Si on sait que E est de dimension n, on peut montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre à n vecteurs
- Si on sait que E est de dimension n, on peut montrer que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice à n vecteurs

Pour obtenir une base à partir d'une famille de vecteurs donnée, on dispose du *théorème de la base incomplète :*

- Toute famille libre $(u_1, \dots, u_k)$ peut être complétée en une base : par exemple, en ajoutant des éléments de la base canonique qui ne sont pas dans $\mathrm{Vect}(u_i, \dots, u_k)$.
- De toute famille génératrice $(u_1, \dots, u_m)$, on peut extraire une base, en enlevant les vecteurs qui peuvent s'exprimer comme combinaison linéaire des autres.

Sous-espaces vectoriels et dimension : Si E est de dimension finie et $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel, alors

- $\dim\ F \leq \dim\ E$;
- Si $\dim\ F = \dim\ E$, alors $F = E$.

Somme et dimension : Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E, alors

$$\boxed{\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)}$$

En particulier, si $E = F \oplus G$, $\dim E = \dim F + \dim G$. De plus, dans ce cas, on peut obtenir une base de E en prenant l'union d'une base de F et d'une base de G.

Applications linéaire et dimension : Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle *rang* de f, noté $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de $\mathrm{Im}(f)$. Le *théorème du rang* stipule alors que

$$\boxed{\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}(f)}$$

En particulier,

- f est injective si, et seulement si, $\mathrm{rg}(f) = \dim E$
- f est surjective si, et seulement si, $\mathrm{rg}(f) = \dim F$
- Si $\dim E = \dim F$: f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective.