ESPACES VECTORIELS NORMES

EVN1 (Rappel)

1) Soit E un $\mathbb{K}$ev, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle <u>NORME</u> sur E toute application de E dans $\mathbb{R}^+$ notée : $x \longmapsto n(x)$ ou $x \longmapsto \|x\|$ telle que :

a) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \quad n(\lambda x) = |\lambda| n(x)$ ou $\|\lambda x\| = |\lambda| . \|x\|$

b) $\forall (x,y) \in E \quad n(x+y) \leq n(x) + n(y)$ ou $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

c) $n(x) = 0 \iff x = \vec{0}$ (ou $\|x\| = 0 \iff x = \vec{0}$)

2) Un evn, abréviation pour espace vectoriel normé, sera donc un $\mathbb{K}$ev sur lequel on a spécifié une norme.

EVN2 Soit E un evn muni de $\| \ \|$:

$\forall (u,v) \in E^2 \quad \big| \|u\| - \|v\| \big| \leq \|u - v\| \leq \|u\| + \|v\|$

et $\big| \|u\| - \|v\| \big| \leq \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

EVN3 <u>EXEMPLES</u> :

1) Sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, les 3 applications $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, $\| \ \|_\infty$ définies par : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

$\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$

$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$

sont 3 normes distinctes sur $\mathbb{K}^n$.

2) Plus généralement, si E est un ev de dimension finie n sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), les 3 applications, encore notées $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, $\| \ \|_\infty$ définies par :
($(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une <u>base</u> de E)

$\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$

$\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2\right)^{1/2}$

$\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} (|\lambda_i|)$

sont 3 normes distinctes sur E.

3) Voir exemples 4) et 5) dans $\boxed{\text{ESM3}}$

EVN4 <u>TOPOLOGIE D'UN EVN</u> : Soit E un evn muni de $\| \ \|$

1) L'application : $\begin{cases} E^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (u,v) \longmapsto \|u - v\| \end{cases}$ est une <u>DISTANCE</u> sur E appelée naturellement <u>distance induite par la norme</u>. La topologie induite par cette distance est dite <u>topologie de la norme</u>, et tout ce qui a été vu ds le chapitre "Espaces métriques" s'applique donc.

2) a) Par exemple, la boule ouverte de centre $u \in E$ et de rayon $r > 0$ est $\{v \in E \mid \|v - u\| < r\} = B_0(u, r)$
La "<u>boule unité ouverte</u>" sera :

$$B_0(\vec{0}, 1) = \{v \in E \mid \|v\| < 1\}$$

b) Par exemple encore : si $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite de vecteurs de E

$(u_n)_{n \geq 0}$ de <u>Cauchy</u> $\iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \forall p \geq 0 \\ \|u_{n+p} - u_n\| < \varepsilon \end{cases}$

EVN5 <u>REMARQUE</u>

1) Soit E un evn muni de $\| \ \|$, et notons ici d la distance induite par $\| \ \|$: cette distance jouit de 2 propriétés particulières :

(P_1) a) $\forall (x,y,z) \in E^3 \quad d(x+z, y+z) = d(x,y)$ (invariance par translation)

(P_2) b) $\forall (x,y) \in E^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$

2) <u>Réciproque intéressante</u> : ces deux propriétés caractérisent les distances induites par des normes : plus précisément soit E un ev muni d'une distance d vérifiant (P_1) et (P_2) ; alors l'application : $\begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ u \longmapsto d(\vec{0}, u) \end{cases}$ est une norme sur E.

EVN6 <u>ESPACE DE BANACH</u> :

1) On appelle <u>ESPACE DE BANACH</u> tout evn dont l'espace métrique associé est <u>COMPLET</u> (on dit plus brièvement tout evn "complet")

2) <u>Exemples</u> :

a) $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, avec l'une quelconques des normes dites <u>usuelles</u> (vues en $\boxed{\text{EVN3}}$), est de Banach.

b) $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ avec $\|f\| = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ est complet.

[c) Plus généralement soit K un espace topo. compact (voir plus loin) et $E = \mathcal{C}(\mathbb{K}; \mathbb{R})$ l'ev des applications continues de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{R}$; l'application $\begin{cases} E \to \mathbb{R}^+ \\ f \mapsto \|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)| \end{cases}$ est une norme et $(E, \| \ \|)$ <u>est de Banach</u>]

EVN6 <u>NORMES EQUIVALENTES</u> :

1) Soit E un ev muni de 2 normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$

a) On dit que ces deux normes sont <u>EQUIVALENTES</u> ssi il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$\forall x \in E \quad \alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x_1\|$

(ou encore $\forall x \in E, x \neq 0 \quad \alpha \leq \dfrac{\|x_2\|_2}{\|x\|_1} \leq \beta$

b) Deux normes sur E sont équivalentes ssi les distances induites définissent la même topologie sur E.

c) Deux normes sur E sont équivalentes ssi les distances induites sont strictement équivalentes (ou encore comparables)

d) Deux normes équivalentes sur E donnent :

* les mêmes ouverts
* les mêmes fermés
* les mêmes parties bornées
* les mêmes suites convergentes
* les mêmes suites de Cauchy

2) <u>Exemples</u> :

a) Sur $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) les 3 normes définies en $\boxed{\text{EVN3}}$ sont équivalentes, car : $\forall u \in \mathbb{K}^n$

$\|u\|_\infty \leq \|u\|_2 \leq \|u_1\| \leq n\|u\|_\infty$

b) Plus généralement :

> Sur un espace vectoriel <u>de</u> <u>dimension finie</u>, toutes les normes sont équivalentes.

EVN7 <u>PRODUIT D'UNE FAMILLE FINIE D'ESPACES NORMES</u> :

1) Soit $(E_1, n_1), \dots, (E_m, n_m)$ m espaces vectoriels normés. L'espace vectoriel produit $E = \prod_{i=1}^{m} E_i$ peut être muni de diverses normes : par exemple, pour $u = (x_1, \dots, x_m) \in E$ et p réel ≥ 1 on peut poser :

$\|u\|_1 = \sum_{i=1}^{m} n_i(x_i)$; $\|u\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} (n_i(x_i))^p\right)^{1/p}$; $\|u\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq m} (n_i(x_i))$

Toutes ces normes sont <u>équivalentes</u> (et définissent toutes la topologie produit, voir plus loin)

2) Le produit d'une famille <u>finie</u> d'espaces de <u>Banach</u>, produit muni de l'une quelconque des normes définies ci-dessus au 1), est aussi un espace de <u>Banach</u>.

EVN8 <u>EVN DE DIMENSION FINIE</u> :

1) Tout evn de dimension <u>finie</u> est <u>complet</u>.

2) Dans un evn de dimension <u>finie</u>, toutes les normes sont <u>équivalentes</u> (et pour toutes ces normes, E est complet)

3) Tout sev d'un evn de dimension <u>finie</u> est aussi de dimension finie et donc <u>complet</u> et <u>fermé</u>.

4) Pour tout $\mathbb{K}$evn E ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dim. finie n et pour toute base $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ de E, l'isomorphisme vectoriel $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$ de $\mathbb{K}^n$ sur E est aussi un <u>homéomorphisme</u>. Si l'on a $(u_k)_{k \geq 0}$ une suite de vecteurs de E et si

indice

$\forall k \geq 0 \quad u_k = u_k^1 b_1 + \dots + u_k^\ell b_\ell + \dots + u_k^n b_n$

alors

(u_k) converge $\iff \begin{cases} \text{pour } i = 1 \text{ à } n \\ (u_k^i)_{k \geq 0} \text{ converge} \end{cases}$

(c.à.d. : "convergence vectorielle" $\iff$ "converg. coord. par coordonnée")

5) <u>evn de dimension finie et compacité</u> :

Dans un evn E de dim. <u>finie</u>, les assertions suivantes sont équivalentes, si $A \subset E$:

a) A est <u>compact</u> ;

b) A est fermé borné ;

c) De toute suite de vecteurs de A, on peut extraire une sous-suite qui converge dans A ;

6) <u>evn de dimension finie et compacité, suite</u> :

a) D'après 5), dans un evn de dim. finie toute boule fermée est compacte.

b) C'est en fait une caractérisation intéressante des evn de dimension finie :

(<u>Théorème de Riesz</u>)
Un evn est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.