

# Topologie des espaces vectoriels normés - Méthodes

**Norme sur un espace vectoriel :** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Une application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une *norme* sur  $E$  si :

1.  $N(x) = 0$  si, et seulement si,  $x = 0$  (Attention à bien montrer les deux implications!)
2. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}, x \in E, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$
3. Pour tous  $(x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$  (*inégalité triangulaire*)

Par ailleurs, si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ , alors  $N(x) := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  définit une norme sur  $E$ .

**Fermés :** Pour montrer que  $A \subset E$  est *fermé*, on peut :

- montrer que son complémentaire  $A^c$  est un ouvert.
- montrer que toute suite  $(x_n)_n$  de points de  $A$  qui converge vers une limite  $\ell$  dans  $E$  vérifie  $\ell \in A$ .
- montrer que  $A$  est une union finie ou une intersection de fermés.

Pour montrer que  $A \subset E$  n'est pas fermé, on trouve un exemple de suite  $(x_n)_n$  convergente vers un  $\ell \in E$ , telle que pour tout  $n, x_n \in A$  mais  $\ell \notin A$ . Typiquement,  $\ell$  est un point du "bord".

**Normes équivalentes :** Pour montrer que deux normes  $N_1, N_2$  sur  $E$  sont équivalentes, on peut :

- Revenir à la définition et chercher des constantes  $c, C > 0$  telles que

$$\forall x \in E, cN_1(x) \leq N_2(x) \leq CN_1(x)$$

- Montrer que toute boule ouverte pour  $N_1$  contient une boule ouverte pour  $N_2$ , et réciproquement.
- Montrer que toute suite qui converge pour  $N_1$  converge aussi pour  $N_2$ , et réciproquement.

Pour montrer que deux normes  $N_1, N_2$  sur  $E$  ne sont pas équivalentes, on peut :

- Raisonner par l'absurde : on suppose qu'il existe deux constantes  $c, C > 0$  telles que

$$\forall x \in E, cN_1(x) \leq N_2(x) \leq CN_1(x)$$

et on cherche  $x \in E$  tel que, par exemple,  $N_1(x) = 1$  et  $N_2(x) > C$ .

- Chercher une suite  $(x_n)_n$  de  $E^{\mathbb{N}}$  telle que

$$\frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \rightarrow 0 \text{ ou } \frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \rightarrow \infty$$

**Intérieur :** Si  $A \subset E$ , l'intérieur de  $A$  est défini par

$$\overset{\circ}{A} = \{x \in A, \exists r > 0, B(x, r) \subset A\}$$

C'est le plus grand ouvert inclus dans  $A$ . Pour montrer qu'un ensemble  $U$  est égal à  $\overset{\circ}{A}$ , on montre que

1.  $U$  est un ouvert inclus dans  $A$  : ceci donne  $\boxed{U \subset \overset{\circ}{A}}$ ;
2. si  $x \in A$  vérifie  $x \notin U$ , alors  $x \notin \overset{\circ}{A}$ ; par contraposée, cela donne  $\boxed{\overset{\circ}{A} \subset U}$ . Typiquement, on montre que pour un tel  $x$ , toute boule ouverte  $B(x, r)$  contient des points de  $A^c$ .

*Raccourci :* Si  $A$  est ouvert, alors  $\overset{\circ}{A} = A$  (et réciproquement).

**Adhérence :** Si  $A \subset E$ , l'adhérence de  $A$  est défini par

$$\overline{A} = \{x \in A, \exists (u_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, u_n \rightarrow x\}.$$

C'est le plus petit fermé contenant  $A$ . Pour montrer qu'un ensemble  $F$  est bien l'adhérence de  $A$ , on montre que

1.  $U$  est un fermé contenant  $A$  : ceci donne  $\boxed{\overline{A} \subset U}$ ;
2. tout élément  $x \in F$  est limite d'une suite de points de  $A$  bien choisie; ceci donne  $\boxed{U \subset \overline{A}}$ .

*Raccourci :* Si  $A$  est fermé, alors  $\overline{A} = A$  (et réciproquement).

**Ouverts :** Pour montrer que  $A \subset E$  est *ouvert*, on peut :

- prendre un élément quelconque  $x \in A$  et chercher  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset A$
- montrer que  $A$  est une union ou intersection finie d'ouverts
- montrer que son complémentaire  $A^c$  est un fermé.

Pour montrer que  $A \subset E$  n'est pas ouvert, on cherche un  $x \in A$  spécifique tel que, pour tout  $r > 0, B(x, r)$  n'est pas inclus dans  $A$  : autrement dit, pour tout  $r > 0$ , il existe  $y \in B(x, r) \cap A^c$ . Typiquement,  $x$  est un point du "bord".

**Intérieur, adhérence, inclusions et complémentaire :** Pour tous  $A, B$  sous-ensembles de  $E$

- $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$ ;  $(\overline{A})^c = \overset{\circ}{A^c}$ ;  $\overline{A^c} = (\overset{\circ}{A})^c$ .
- Si  $A \subset B$  alors  $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$  et  $\overline{A} \subset \overline{B}$ .
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ;  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ . Attention : la réciproque est fautive!
- $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ ;  $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$ . Attention : la réciproque est fautive!