# Mesures et Intégration

**Tribus et ensembles mesurables :** On appelle *tribu* sur $X$ toute famille $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(X)$ telle que

- $\emptyset \in \mathscr{T}$,
- Si $A \in \mathscr{T}$ alors $A^c \in \mathscr{T}$
- Si $(A_n)_n \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}$, alors $\bigcup_n A_n \in \mathscr{T}$.

Les éléments de $\mathscr{T}$ sont les *ensembles mesurables*. On dit que $(X, \mathscr{T})$ est un *espace mesurable*.

• On appelle *tribu engendrée* par une famille $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ la plus petite tribu qui contient $\mathscr{F}$. On la note $\sigma(\mathscr{F})$.
• La tribu engendrée par la famille des ouverts de $\mathbb{R}^d$ est appelée *tribu des boréliens* et notée $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$.

**Fonctions mesurables :** $f : (X_1, \mathscr{T}_1) \to (X_2, \mathscr{T}_2)$ est $\mathscr{T}_1$*-mesurable* si $f^{-1}(B) \in \mathscr{T}_1$ pour tout $B \in \mathscr{T}_2$.

Le plus souvent, $(X_2, \mathscr{T}_2) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Dans ce cas, pour montrer que $f : (X, \mathscr{T}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable, il suffit de montrer que , pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]a, +\infty[) \in \mathscr{T}$. On note $\mathscr{L}^0(X, \mathscr{T})$ l'ensemble des fonctions mesurables.

Les fonctions suivantes sont $\mathscr{T}$-mesurables :

- Les fonctions continues
- Les fonctions monotones
- Les indicatrices $\mathbb{1}_A$ pour $A \in \mathscr{T}$
- Les composées de fonctions mesurables
- Les sommes, produits, quotients, max et min de fonctions mesurables
- Les inf, sup, liminf, limsup et limites de suites de fonctions mesurables

On appelle *fonctions étagées* les fonctions de la forme $\sum_k \lambda_k \mathbb{1}_{A_k}$. Elles sont $\mathscr{T}$-mesurables ssi $\forall k$, $A_k \in \mathscr{T}$. Elles jouent le rôle des fonctions en escaliers dans la théorie de Riemann :

**Théorème :** Toute fonction mesurable $f : (X, \mathscr{T}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ est limite d'une suite croissante de fonctions étagées mesurables.

**Mesure :** Une *mesure* sur $(X, \mathscr{T})$ est une application $\mu : \mathscr{T} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ qui vérifie

- $\mu(\emptyset) = 0$
- Si $(A_n)_n \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable disjointe, alors $\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$

On dit que $(X, \mathscr{T}, \mu)$ est un *espace mesuré*.

On dit qu'une propriété $P(x)$ est vérifiée $\mu$-presque partout si $\mu(\{x \in X, \neg P(x)\}) = 0$.

*Exemples :*

- La mesure de comptage $\mu$ sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ définie par $\mu(A) = \operatorname{Card} A$
- La mesure de Lebesgue $\lambda$ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, qui généralise la longueur des intervalles.

*Propriétés :*

- Si $A \subset B$ alors $\mu(A) \leq \mu(B)$
- Si $(A_n)_n \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}$, $\mu(\cup_n A_n) \leq \sum \mu(A_n)$
- Si $(A_n)_n \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}$ est croissante alors $\mu(\cup_n A_n) = \lim_n \mu(A_n)$.
- Si $(A_n)_n \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}$ est décroissante et $\mu(A_0) < \infty$ alors $\mu(\cap_n A_n) = \lim_n \mu(A_n)$.

• On dit que $\mu$ est *finie* si $\mu(X) < \infty$.
• On dit que $\mu$ est $\sigma$*-finie* s'il existe $(E_n) \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}$ croissante telle que $\cup_n E_n = X$ et, pour tout $n$, $\mu(E_n) < \infty$.

**Méthode :** On peut montrer une propriété sur une mesure $\sigma$-finie en la montrant d'abord sur les mesures finies $\mu_n : A \in \mathscr{T} \mapsto \mu(E_n \cap A)$, puis en passant à la limite.

**Intégration :** Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ mesuré et $f \in \mathscr{L}^0(X, \mathscr{T})$ positive. On définit l'intégrale de $f$ par rapport à $\mu$ par

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \inf_{A_k} f, (A_k) \in \mathrm{PMF}(X, \mathscr{T}) \right\}$$

où PMF est l'ensemble des partitions mesurables finies de $X$. On a, en particulier, $\int_X \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A)$.

Soit $f \in \mathscr{L}^0(X, \mathscr{T})$. On associe à $f$ les fonctions mesurables positives

$$f_+ = \max(f, 0), \quad f_- = \max(-f, 0)$$

Alors $f = f_+ - f_-$ et $|f| = f_+ + f_-$.
On dit que $f$ est *intégrable* si $\int_X |f| d\mu < \infty$. Dans ce cas on pose

$$\boxed{\int_X f d\mu = \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu}$$

On note $\mathscr{L}^1(X, \mathscr{T}, \mu)$ l'ensemble des fonctions intégrables.
*Propriétés :* Soient $f, g \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{T}, \mu)$. Alors :

- $f \mapsto \int_X f d\mu$ est linéaire
- Si $f \leq g$, $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$
- Si $f = g$ $\mu$-p.p., $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$
- $\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$
- Si $\int_X |f| d\mu = 0$ alors $f = 0$ $\mu$-p.p.

**Théorèmes de convergence :** Les trois théorèmes suivants nous permettent d'intervertir limite et intégrale :

1. **Théorème de convergence monotone** : Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions mesurables positives, et $f = \lim_n f_n = \sup_n f_n$. Alors $f$ est mesurable et $\int_X f d\mu = \lim \int_X f_n d\mu$.
2. **Lemme de Fatou :** Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors
$$\int_X \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int_X f_n d\mu$$
3. **Théorème de convergence dominée :** Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables telles que
   - $\lim_n f_n(x)$ existe pour presque tout $x \in X$,
   - il existe $g \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{T}, \mu)$ telle que pour tout $n$ et pour presque tout $x$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

   Alors $f = \lim f_n$ est intégrable,
$$\int_X f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu \text{ et } \lim_{n \to \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

**Intégrales multiples :** Soient $(X_1, \mathscr{T}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathscr{T}_2, \mu_2)$ mesurés $\sigma-$finis. Alors il existe une unique mesure $\mu$ sur $(X_1 \times X_2, \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2)$ telle que $\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$ pour tout $A_1 \in \mathscr{T}_1$ et $A_2 \in \mathscr{T}_2$.

On l'appelle *mesure produit*, notée $\mu_1 \otimes \mu_2$.

Cette mesure nous permet notamment de calculer des intégrales multiples. Les théorèmes suivants nous permettent d'intervertir l'ordre d'intégration :

1. **Théorème de Fubini-Tonelli :** Soit $f \in \mathscr{L}^0(X_1 \times X_2)$ positive. Alors

$$x \in X_1 \mapsto \int_{X_2} f(x,y)d\mu_2(y) \text{ et } y \in X_2 \mapsto \int_{X_1} f(x,y)d\mu_1(x)$$

sont mesurables, et

$$\int_{X_1 \times X_2} f d\mu = \int_{X_1} \left( \int_{X_2} f(x,y)d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = \int_{X_2} \left( \int_{X_1} f(x,y)d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y)$$

2. **Théorème de Fubini :** Soit $f \in \mathscr{L}^1(X_1 \times X_2, \mathscr{T}_1 \otimes T_2, \mu)$. Alors :
   - pour presque tout $x \in X_1$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est dans $\mathscr{L}^1(X_2, T_2, \mu_2)$,
   - pour presque tout $x \in X_2$, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est dans $\mathscr{L}^1(X_1, T_1, \mu_1)$.
   - $x \mapsto \int_{X_2} f(x,y)d\mu_2(y) \in \mathscr{L}^1(X_1, T_1, \mu_1)$ et $y \mapsto \int_{X_1} f(x,y)d\mu_1(x) \in \mathscr{L}^1(X_2, T_2, \mu_2)$ ;
   - $$\int_{X_1 \times X_2} f d\mu_1 \otimes \mu_2 = \int_{X_1} \left( \int_{X_2} f(x,y)d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = \int_{X_2} \left( \int_{X_1} f(x,y)d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y)$$

**Espaces $\mathscr{L}^p$** : Pour $p \in [1, \infty[$, on définit

$$\mathscr{L}^p(\mu) = \{ f \in \mathscr{L}^0(X, \mathscr{T}), \int_X |f|^p d\mu < \infty \}$$

et pour $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$ on notera $N_p(f) = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$.
Par ailleurs, on définit

$$\mathscr{L}^\infty(\mu) = \{ f : X \to \mathbb{R}, \exists A > 0 \text{ t.q. } |f| \leq A \, \mu - p.p. \}$$

et pour $f \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$ on notera

$$N_\infty(f) = \inf\{ A > 0, \, \mu(\{|f| > A\}) = 0 \}$$

Pour $p \in [1, \infty]$, $\mathscr{L}^p(\mu)$ est un espace vectoriel et $N_p$ est une semi-norme :

- ▷ $N_p(f) = 0 \iff f = 0$ $\mu$-p.p.
- ▷ $N_p(\lambda f) = |\lambda| N_p(f)$
- ▷ $N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g)$

**Inégalité de Hölder :** Soient $p, q \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, pour toutes $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$ et $g \in \mathscr{L}^q(\mu)$,

$$\boxed{N_1(fg) \leq N_p(f) N_p(g)}$$

**Convergence dominée :** Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions qui converge $\mu$-p.p. vers une fonction $f$. On suppose

- ▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathscr{L}^p(\mu)$
- ▷ Il existe $g \in \mathscr{L}^p(\mu)$ telle que pour tout $n$, $|f_n| \leq g$

Alors $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$ et $N_p(f_n - f) \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

**Densité des fonctions sympathiques :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle *support* de $f$ l'ensemble

$$\text{supp}(f) = \overline{\{ x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0 \}}.$$

Le support de $f$ est donc l'adhérence de l'ensemble où $f$ est non nulle.

On notera $\mathscr{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$.

Alors $\mathscr{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{L}^p(\lambda)$ : pour toute $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $N_p(f - g) < \varepsilon$.

**Inclusions entre les $\mathscr{L}^p(\mu)$** : Soit $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

- ▷ Si $\mu(X) < \infty$, $\mathscr{L}^q(\mu) \subset \mathscr{L}^p(\mu)$.
- ▷ Sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ avec la mesure de comptage, $\mathscr{L}^p(\mu) \subset \mathscr{L}^q(\mu)$.

*Remarque :* La seconde inclusion est vraie dès que $(X, \mathscr{T}, \mu)$ n'admet pas d'ensemble de mesure arbitrairement petite. Plus précisément, si

$$\inf\{ \mu(E), E \in \mathscr{T} \text{ t.q. } \mu(E) > 0 \} > 0$$

alors $\mathscr{L}^p(\mu) \subset \mathscr{L}^q(\mu)$ pour $p \leq q$.

*Contre-exemple :* Sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, qui ne tombe dans aucun des deux cas, on a

$$\frac{1}{x} \mathbb{1}_{[1, \infty[} \in \mathscr{L}^2(\lambda) \setminus \mathscr{L}^1(\lambda), \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{]0,1]} \in \mathscr{L}^1(\lambda) \setminus \mathscr{L}^2(\lambda)$$

Par ailleurs, pour une fonction donnée $f \in \mathscr{L}^0(X, \mathscr{T})$, l'ensemble $\{ p \in [1, \infty], f \in \mathscr{L}^p(\mu) \}$ est un intervalle.

En particulier,

$$\bigcap_{1 \leq p \leq \infty} \mathscr{L}^p(\mu) = \mathscr{L}^1(\mu) \cap \mathscr{L}^\infty(\mu)$$