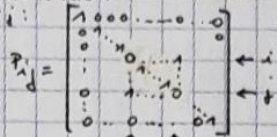


8 MATRICES ELEMENTAIRES:

a) Définition: on appelle ainsi les 3 types de matrices carrées d'ordre $n \geq 2$ suivants:

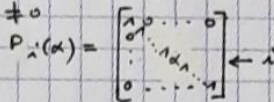
x) Matrices P_{ij} , $i < j$:

Elle est obtenue à partir de I_n en échangeant ligne i et ligne j .



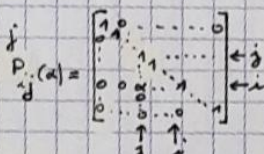
β) Matrices $P_i(\alpha)$, $\alpha \neq 0$

Elle est obtenue à partir de I_n en multipliant L_i par α .



γ) Matrices $P_{ij}(\alpha)$, $i \neq j$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Elle est obtenue à partir de I_n en ajoutant αL_j à L_i .



b) Propriétés: on a

$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$, $P_i(\alpha) \cdot P_i(1/\alpha) = I_n$ et $P_{ij}(\alpha) \cdot P_{ij}(-\alpha) = I_n$.
Donc toutes les matrices élémentaires sont inversibles et plus précisément:

$$\boxed{P_{ij}^{-1} = P_{ij} \quad P_i(\alpha)^{-1} = P_i(1/\alpha) \quad P_{ij}(\alpha)^{-1} = P_{ij}(-\alpha)}$$

9 MATRICES ELEMENTAIRES ET OPER. ELEMENTAIRES

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ qu'on va noter ici:

$$A = \begin{bmatrix} \text{ligne } 1 \\ \vdots \\ \text{ligne } n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} \quad \text{Alors:}$$

$$\begin{array}{l} L_i \leftrightarrow L_j \iff A \leftarrow P_{ij} \cdot A \\ L_i \leftarrow \alpha L_i \iff A \leftarrow P_i(\alpha) \cdot A \\ L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j \iff A \leftarrow P_{ij}(\alpha) \cdot A \end{array}$$

(avec P_{ij} , $P_i(\alpha)$ et $P_{ij}(\alpha)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

10 EQUIVALENCE-LIGNE:

Soit A et B dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Définition: A et B sont "EQUIVALENTES-LIGNE" ($A \sim B$) si B peut être obtenue à partir de A par une succession d'op. élémentaires de lignes, c'est-à-dire s'il existe k matrices élémentaires E_1, E_2, \dots, E_k telles que

$$\boxed{B = E_k \circ E_{k-1} \circ \dots \circ E_1 \circ A}$$

Si j'applique la MÊME succession d'op. élém. à la matrice identité I_n , j'obtiens évidemment $E_k \circ \dots \circ E_1 = P$ tel que $B = PA$ de manière symbolique:

$$\boxed{[A | I_n] \sim [B | P] \implies B = PA}$$

11 APPLICATION A L'INVERSION DES MATRICES:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\boxed{[A | I_n] \sim [I_n | P] \iff \begin{cases} A \text{ inversible} \\ A^{-1} = P \end{cases}}$$

Cette technique s'appelle "calcul de l'inverse de A , s'il existe, par la méthode du Pivot de Gauss".

12 FORME CANONIQUE-LIGNE:

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Il existe une UNIQUE matrice R qui vérifie les 4 propriétés suivantes:

12 suite

a) $R \sim A$

b) R est échelonnée, c'est-à-d. que sous une ligne nulle, il n'y a que des zéros, et le nombre de zéros au début d'une ligne non nulle est strictement supérieur à celui de la ligne précédente.

c) le premier terme non nul d'une ligne non nulle est égal à 1.

d) ce 1 est le seul terme non nul dans sa colonne.

on appelle R la forme canonique ligne (f.c.l. en abrégé) de A .

13 RANG D'UNE MATRICE:

1) Définition: pour toute matrice A , on nomme RANG de A et on note $\text{rg}(A)$ le nombre de lignes non nulles de sa forme canonique ligne.

2) Remarque: c'est d'ailleurs aussi le nombre de lignes non nulles de toute matrice ECHELONNEE équivalente ligne à A .

3) Propriétés:

Soit toutes les matrices A et B , $m \times n$:

a) $A \sim B \implies \text{rg}(A) = \text{rg}(B)$

b) Si A est de format $m \times n$, alors $\text{rg}(A) \leq \min(m, n)$

c) Si $A \cdot B$ est défini, $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B))$

14 RETOUR SUR LES MATRICES INVERSIBLES:

Les 5 propositions suivantes sont équivalentes, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

a) A est inversible

b) $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\text{rg}(A) = n$

d) la forme canonique de A est I_n

e) A est un produit de matrices élémentaires.

MATRICES (2)