Séries

Vocabulaire : Soit $(a_n)_n$ une suite réelle. On appelle *suite des sommes partielles* la suite $(S_n)_n$définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

- On dit que la *série* $\sum a_n$ *converge* si la suite $(S_n)_n$ converge dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas, sa limite est notée

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n}$$

- Sinon, on dit que la série $\sum a_n$ *diverge.*
- On dit que $(a_n)_n$ est le *terme général* de la série $\sum a_n$.
- Si la série de terme général $(|a_n|)_n$ converge, on dit que la série $\sum a_n$ *converge absolument.*

$\rightsquigarrow$ Une série absolument convergente est convergente.

- Si $\sum |a_n|$ diverge mais $\sum a_n$ converge on dit que la série $\sum a_n$ est *semi-convergente.*
- On dit que deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont *de même nature* si elles sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.

Si la série $\sum a_n$ converge, alors nécessairement

$$a_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Par contraposée, si $a_n \nrightarrow 0$, alors la série $\sum a_n$ diverge. Dans ce cas, on dit que $\sum a_n$ *diverge grossièrement.*

⚠ Ce n'est pas suffisant : $\frac{1}{n} \to 0$ mais la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Indifférence aux premiers termes : La convergence de la série dépend de son comportement *à l'infini* (en jargon, on dit "asymptotique"). En particulier, si deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ vérifient

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \, a_n = b_n$$

alors les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature.

Exemples fondamentaux : Trois exemples à connaître :
- La série de terme général $(1/n)_n$ diverge.
- La série de terme général $(1/n^2)_n$ converge.
- Pour $q \in \mathbb{R}$, la série de terme général $(q^n)_n$ converge si $|q| < 1$, diverge sinon.

Série à terme général positif : Lorsque $a_n \geq 0$ pour tout n, la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est croissante : il suffit donc que $(S_n)_n$ soit majorée pour que la série $\sum a_n$ soit convergente.

De plus, puisque les séries absolument convergentes sont convergentes, pour étudier une série de t.g. $(a_n)_n$ dont le signe n'est pas constant, on peut commencer par étudier $\sum |a_n|$: si cette série à terme général positif converge, alors $\sum a_n$ est convergente.

On s'intéresse donc particulièrement aux séries à t.g. positif, pour lesquelles ont dispose d'un certain nombre de *critères de convergence*, qui permettent de trouver la nature de la série en étudiant son terme général, *sans avoir à calculer la suite des sommes partielles.*

Critères de convergence pour les séries à t.g. positif : Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ deux suites positives.
- *Principe de comparaison :* Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$, alors
  - Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge
  - Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.
- *Principe d'équivalence :* Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
- *Critère de Cauchy :* Supposons que $u_n > 0$ pour tout n et que la suite $(u_n^{\frac{1}{n}})_n$ a une limite ℓ, alors
  - Si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge ;
  - Si $\ell < 1$, $\sum u_n$ converge ;
  - ⚠Si $\ell = 1$... ¯_(ツ)_/¯.
- *Critère de d'Alembert :* Supposons que $u_n > 0$ pour tout n et que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ a une limite ℓ, alors
  - Si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge ;
  - Si $\ell < 1$, $\sum u_n$ converge ;
  - ⚠Si $\ell = 1$... ¯_(ツ)_/¯.
- *Comparaison série-intégrale :* Si $(u_n)_n$ est de la forme $u_n = f(n)$ où $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+^*$ est dontinue décroissante, alors $\sum u_n$ converge ssi l'intégrale généralisée $\int_1^\infty f(t)dt$ converge. $\rightsquigarrow$ On obtient ainsi que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

Quelques réflexes à avoir :
- S'il y a des factorielles : essayer d'Alembert.
- Pour utiliser le critère d'équivalence : on veut étudier $\sum u_n$ en comparant $(u_n)_n$ à une suite plus simple $(v_n)_n$ (typiquement, $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$).
  Pour trouver la "bonne" suite $(v_n)_n$, on peut
  - mettre en facteur le terme dominant, si $(u_n)_n$ est un quotient de polynômes
  - utiliser des développements limités, si $(u_n)_n$ fait intervenir des fonctions usuelles (exp, ln, cos, sin ...)
- Le critère de comparaison série-intégrale est particulièrement utile pour les suites de la forme $\left(u_n = \frac{1}{n \ln(n)^\alpha}\right)$.

Critère d'Abel : Supposons que $u_n = a_n b_n$ avec :
1. $(a_n)_n$ est décroissante et $a_n \to 0$;
2. La suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^n b_k)$ est bornée ;

Alors $\sum u_n$ converge.

Cas particulier : les séries alternées. Si $u_n = (-1)^n a_n$, où $(a_n)_n$ est une suite décroissante qui tend vers 0, alors $\sum u_n$ converge.

Exemple : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.