

# SYSTEMES LINEAIRES (1)

1) On appelle Equation linéaire à p inconnues toute équation de la forme :

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_p x_p = \beta \quad (1)$$

\*  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  est le p-uplet des inconnues.  
 \*  $a_1, a_2, \dots, a_p, \beta$  sont des coefficients numériques réels.

b) Un p-uplet  $(c_1, c_2, \dots, c_p)$  de réels est solution de (1) si et seulement si l'égalité  $a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_p c_p = \beta$  est vérifiée.

c) L'équation  $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_p = \beta$   
 \* n'a pas de solution si  $\beta \neq 0$   
 \* a tout p-uplet  $(c_1, c_2, \dots, c_p)$  comme solution si  $\beta = 0$

2) On appelle SYSTEME DE n EQUATIONS A p INCONNUES la juxtaposition de n équations linéaires à p inconnues

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{ip}x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

\*  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  est le p-uplet des inconnues  
 \* pour  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq p$ ,  $a_{ij}$  et  $b_i$  sont des coefficients numériques réels.  
 \* la i-ème équation  $a_{i1}x_1 + \dots + a_{ip}x_p = b_i$  est notée  $(L_i)$  et appelée i<sup>ème</sup> ligne de (S)

b) Un p-uplet  $(c_1, c_2, \dots, c_p)$  est solution de (S) si et seulement si il est solution de TOUTES les lignes

c) Résoudre le système consiste à trouver l'ensemble de TOUTES les solutions du système

d) Un système n'ayant aucune solution est parfois dit "impossible"

e) Un système ayant une infinité de solutions est parfois dit "indéterminé"

3) SYSTEMES EQUIVALENTS

a) deux systèmes sont dits EQUIVALENTS s'ils ont le MÊME ensemble de solutions :  $(S) \Leftrightarrow (S')$  ou  $(S) \sim (S')$

b) Le principe de la méthode qui est exposé plus loin est de résoudre un système en le transformant en systèmes équivalents de plus en plus simples.

4) SYSTEMES HOMOGENES

a) on appelle système HOMOGENE un système dont tous les membres de droite sont NULS. Avec les notations de (2) a), cela signi-

-file:  $b_1 = b_2 = \dots = b_i = \dots = b_n = 0$

b) Une remarque importante: Un système homogène admet toujours la solution NULLE  $(0, 0, \dots, 0)$

## 5 OPERATIONS ELEMENTAIRES:

a) on appelle OPERATION ELEMENTAIRE sur les lignes d'un système toute opération de l'un des 3 types suivants:

- ① pour  $i \neq j$   $L_i \leftrightarrow L_j$   
Echange des lignes  $L_i$  et  $L_j$
- ② pour  $\alpha \neq 0$   $L_i \leftarrow \alpha L_i$   
Multiplication de  $L_i$  par  $\alpha$
- ③ pour  $i \neq j$   $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$   
Ajout à  $L_i$  de  $L_j$  multipliée par  $\beta$

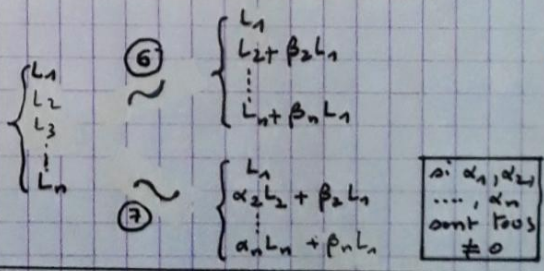
b) on appellera "opération légitime" les 2 opérations suivantes

- ④ si  $\alpha \neq 0$  et  $i \neq j$   
 $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$
- ⑤  $L_i \leftarrow L_i + \sum_{j \neq i} \beta_j L_j$

c) le résultat essentiel est le suivant:

quand on applique à un système (S) l'une des opérations ①, ②, ③, ④ ou ⑤, on obtient un système EQUIVALENT à (S)

## 6 FONDEMENT DU PIVOT DE GAUSS



## 7 METHODE DU PIVOT DE GAUSS

a) Principe: Il s'agit d'utiliser les opérations vues en ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦ pour transformer le système que l'on cherche à résoudre en un système EQUIVALENT ECHOLONNE.

b) Exposé de la méthode:  
 Considérons le système (S) de (2)  
 1) si l'on a  $a_{11} = a_{21} = \dots = a_{n1} = 0$ , il est clair que dans (S), on peut remplacer  $x_1$  par tout réel et résoudre un système en  $(x_2, \dots, x_p)$