Valeurs d'adhérence et partitions de $\mathbb{N}$

Proposition 1. Soit $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose qu'il existe $\ell_p \neq \ell_i$ deux réels tels que

$$\begin{cases} a_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell_p \\ a_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell_i \end{cases}$$

Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(a_n)_n$ est $Adh((a_n)_n) = \{\ell_p, \ell_i\}$.

Preuve. On procède par double inclusion.

$\boxed{\supset}$ C'est le sens "facile" : $(a_{2n})_n$ est une sous-suite de $(a_n)_n$ qui converge vers ℓ_p, donc $\ell_p \in Adh((a_n)_n)$. De même, $\ell_i \in Adh((a_n)_n)$ puisque c'est la limite de la sous-suite $(a_{2n+1})_n$.

$\boxed{\subset}$ Soit ℓ une valeur d'adhérence de $(a_n)_n$. Il s'agit de montrer que $\ell = \ell_p$ ou $\ell = \ell_i$.

Puisque $\ell \in Adh((a_n)_n)$, il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $a_{\varphi(n)} \to \ell$. Considérons l'ensemble $\varphi(\mathbb{N}) = \{\varphi(n), n \in \mathbb{N}\}$. Il y a trois cas possibles :

1. Soit, à partir d'un certain rang, tous les éléments de $\varphi(\mathbb{N})$ sont pairs :

   $$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ \exists k_n \in \mathbb{N}, \varphi(n) = 2k_n$$

   Remarquons qu'alors, puisque φ est strictement croissante, l'application $n \in \mathbb{N} \mapsto k_n$ est également strictement croissante.

   En conséquence, à partir du rang N, $a_{\varphi(n)} = a_{2k_n}$ donc $(a_{\varphi(n)})_n$ est une sous-suite de $(a_{2n})_n$. On en déduit que $\ell = \lim a_{\varphi(n)} = \lim a_{2n} = \ell_p$.

2. Soit, à partir d'un certain rang, tous les éléments de $\varphi(\mathbb{N})$ sont impairs :

   $$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ \exists k_n \in \mathbb{N}, \varphi(n) = 2k_n + 1$$

   Remarquons qu'alors, puisque φ est strictement croissante, l'application $n \in \mathbb{N} \mapsto k_n$ est également strictement croissante.

   Comme précédemment, dans ce cas, $(a_{\varphi(n)})_n$ est une sous-suite de $(a_{2n+1})_n$ à partir du rang N. On en déduit que $\ell = \lim a_{\varphi(n)} = \lim a_{2n+1} = \ell_i$.

3. Soit $\varphi(\mathbb{N})$ contient une infinité de pairs et d'impairs :

   $$\forall N \in \mathbb{N}, \exists p \geq N, \exists q \geq N, \varphi(p) \text{ pair et } \varphi(q) \text{ impair.} \tag{$*$}$$

   Montrons que ce cas aboutit à une contradiction. On sait que $\ell_p \neq \ell_i$ donc $\varepsilon = \frac{1}{3}|\ell_i - \ell_p| > 0$. Alors :

   - $(a_{2n})_n \to \ell_p$ donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $|a_{2n} - \ell_p| < \varepsilon$.
   - $(a_{2n+1})_n \to \ell_p$ donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $|a_{2n+1} - \ell_i| < \varepsilon$.
   - $a_{\varphi(n)}$ converge, donc est de Cauchy : il existe $N_2 \in N$ tel que pour tous $p, q \geq N_2$, $|a_{\varphi(p)} - a_{\varphi(q)}| < \varepsilon$.

En utilisant $(*)$ avec $N = \max(2N_0, 2N_1+1, N_2)$, on obtient qu'il existe $p, q \geq N$ et $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $\varphi(p) = 2i$ et $\varphi(q) = 2j+1$. Comme φ est strictement croissante, on a de plus

$$\begin{cases} \varphi(p) \geq p \geq N \geq 2N_0 \text{ donc } i \geq N_0 \\ \varphi(q) \geq q \geq N \geq 2N_1 + 1 \text{ donc } j \geq N_1 \end{cases}$$

d'où

$$|a_{\varphi(p)} - \ell_p| = |a_{2i} - \ell_p| < \varepsilon \text{ et } |a_{\varphi(q)} - \ell_i| < \varepsilon$$

On en déduit que

$$|\ell_p - \ell_i| \leq |a_{\varphi(p)} - \ell_p| + |a_{\varphi(p)} - a_{\varphi(q)}| + |a_{\varphi(q)} - \ell_i| < 3\varepsilon = |\ell_p - \ell_i|,$$

ce qui est contradictoire. □

Plus généralement, on peut montrer de la même façon :

Proposition 2. Soit $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose qu'il existe $\ell_1, \ldots, \ell_k$ k réels tous distincts et $\varphi_1, \ldots, \psi_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ k applications strictement croissantes tels que

$$\forall\ j \in [\![1, k]\!],\ a_{\psi_j(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell_j$$

On suppose de plus que les ensembles $\psi_1(\mathbb{N}), \ldots, \psi_k(\mathbb{N})$ forment une partition de $\mathbb{N}$.

Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(a_n)_n$ est $Adh((a_n)_n) = \{\ell_1, \ldots, \ell_k\}$.